Blatt 9 22. Juni 2005

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Biologen 2
Dr. Maria Neuss-Radu

1. In dem Jahr 1879 wurden ungefähr 435 gestreifte Barsche (Roccus saxtilis) aus dem Atlantischen Ozean in der San Fransisco Bay ausgesetzt. Im Jahre 1899 betrug der kommerzielle Netzfang 1234000 Pfund (MacArthur und Connel, 1966). Das durchschnittliche Gewicht eines Barsches sei gleich ein Pfund. Man nehme an, dass 1899 jeder zehnte Fisch gefangen wurde. Das Wachstum der Population war so stark, dass es sinnvoll ist, mit der Differentialgleichung $\frac{dN}{dt} = \lambda N$ zu arbeiten. Bestimmen Sie λ, wenn t in Jahren gemessen wird.

2. (Eigenwerte und Eigenvektoren) Gegeben sei die Matix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2.

   (a) Zeigen Sie, dass für $a_{12} \neq 0$ die Eigenvektoren durch

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenvektor zu } \lambda_1$$

$$v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenvektor zu } \lambda_2.$$

   gegeben sind. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren im Falle $a_{12} = a_{21} = 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass im Falle konjugiert komplexer Eigenwerte auch die Eigenvektoren konjugiert komplexe Vektoren sind.

3. (Verdauung der Wiederkäuer) Wiederkäuer, wie z.B. Hirsche, Schafe, Ziegen, Rinder, haben einen komplizierten Magen. Frisch gefressenes, unzerkautes Futter gelangt in ein Vorratskompartiment, Pansen genannt. Später, wenn es zerkaut ist, gelangt es in den Labmagen (Abomasum), wo es weiter verdaut wird.

Es seien nun $r = r(t)$ die Futtermenge im Rumen zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ sei diese Menge $r(0) = r_0$. Mit $u = u(t)$ bezeichnen wir die Futtermenge im Abomasum zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ sei $u(0) = 0$. Die Abnahmerate von r wird proportional zu r, mit einer Proportionalitätskonstanten k_1, angesetzt. Die Änderungsrate von u besteht aus zwei Termen: eine Zuwachsrate, gleich der Abnahmerate von r und einer Abnahmerate, proportional zu u, mit einer Proportionalitätskonstanten k_2. Es sei $k_1 \neq k_2$.

Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Futtermenge in den zwei Kompartimenten: Pansen und Abomasum.

4. (Biologische Osillatoren) Einige biologische Rhytmen werden durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0, \quad k > 0$$

beschrieben. Diese Gleichung kann mittels Einfhrung der Hilfsvariablen

$$x = \frac{dy}{dt}$$

in ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung in den Unbekannten x und y umgewandelt werden.

   (a) Schreiben Sie dieses System auf und bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösung (Exponentielles Wachstum, Abfall oder Oszillationen). Wie hängen die Lösungen vom Parameter k ab?

   (b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung für $k = 2$.

Abgabetermin: Montag, 27. 06. 2005, 16 Uhr, in den Fächern im Flur des Instituts für Angewandte Mathematik, INF 294.