El 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* Ableitungsregeln	§

Um Nullstellen bestimmen zu können, muss man Ausklammern, Umformen und Substituieren können. Zudem sollte man eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen wie die abc-Formel beherrschen. Das Nullstellenbestimmen hat auch für die Ableitungsfunktion eine große Bedeutung, denn so findet man Kandidaten für lokale Extrema, die wichtig für Optimierungen aller Art sind. Um die Ableitungsfunktion einer Funktion bestimmen zu können, gibt es einige wenige und einfache Ableitungsregeln, die man kennen sollte. Um diese geht es nun.

Übersicht der Regeln
In der 10. Klasse beschränkt man sich auf folgende drei Regeln:

- Die Potenzregel (mit Zusatz für konstante Funktionen)
- Die Faktorregel
- Die Summenregel

Die Namen sind natürlich überhaupt nicht wichtig, doch sind sie eigentlich sinnvoll gewählt. Die weiteren wichtigen Regeln sind diese beiden Regeln, die in der Kursstufe besprochen werden:

- Produktregel
- Kettenregel

Es gibt noch die Quotientenregel und die Regel für konstante Funktionen, doch sind das keine neuen Regeln. Sie ergeben sich einfach aus den anderen. Wir beschränken uns daher auf diese fünf Regeln. Zu jeder Regel gibt es einen kurzen Text und einige kommentierte Beispiele.

Die Potenzregel
Man kann jede dieser Regeln beweisen, aber darum geht es hier nicht. Einmal gefunden, kann man mit der Faktorregel alle Potenzfunktionen ableiten. Potenzfunktionen sind Funktionen wie x^2, aber auch $1/x^3$ oder $\sqrt{x}$ sind solche Funktionen. Um die Faktorregel anwenden zu können, schreibt man die Potenzfunktion erst einmal in die Form x^b um, um dann die Ableitung einfach mit bx^{b-1} zu bestimmen. Man schreibt die alte Hochzahl vor das x und die neue Hochzahl ist um Eins kleiner als die alte.

Beispiel 1
$f(x) = x^3$. Dann ist nach der Potenzregel $f'(x) = 3x^2$.

Beispiel 2
$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Dann ist nach der Potenzregel $f'(x) = (-3) \cdot x^{-3-1} = -3 \cdot x^4$. Bei diesem Beispiel muss man wissen, dass man Brüche wie 1/x zu x^{-1} umschreiben darf. Danach muss man noch aufpassen, was es heißt, wenn man eine negative Zahl um 1 kleiner macht!

Beispiel 3
$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Auch hier muss man wissen, wie man Wurzeln von x in Hochzahlen umbastelt. Nun ist es ganz einfach, die Potenzregel gibt uns diese Lösung: $f'^{(x)} = 0{,}5x^{0{,}5-1} = 0{,}5x^{-1/2}$. Hieran kann man noch einmal das Umformen üben! Denn $0{,}5x^{-1/2}$ heißt ja $0{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Beispiel 4
Auch Geraden wie c(x) = x lassen sich mit der Potenzregel ableiten. Natürlich weiß man bereits, dass die Steigung bei Geraden einfach die Zahl vor dem x ist, die häufig mit „m“ bezeichnet wird. Hier gilt m=1. Die Ableitung c‘(x) schreibt sich nach der Potenzregel so: $c(x) = 1 \cdot x^0$. Um dieses Ergebnis richtig interpretieren zu können, muss man wieder etwas wissen: x^0 ist immer gleich 1. Sogar für x=0, was vielleicht etwas komisch wirkt. Mit dieser Konvention ist dann das Ergebnis, das wir mit der Potenzregel erhalten haben Eins mal Eins und so stimmt es mit unserem Vorwissen überein.

Zusatz zur Potenzregel
Wir haben bisher noch nicht besprochen, was für konstante Funktionen geschieht, also wie die Funktion b(x)=1. Auch die Ableitung von Funktionen wie b kann man aber mit der Potenzregel finden: $\mathrm{b}(x) = x^0$. Nun ist nach der Potenzregel dann $\mathrm{b}‘(x) = 1 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$, weil wir ja einen Faktor Null dabei haben (das ist übrigens Mathematisch nicht ganz sauber…). Das stimmt aber mit unserem Wissen überein, dass konstante Funktionen eine Steigung von Null aufweisen, da sich der Funktionswert ja nie ändert!

Die Faktorregel
Nun sind ja die Potenzfunktionen „ziemlich nackt“. Es gibt ja nicht nur Funktionen wie $f(x)=x^3$, sondern oft sehen sie komplizierter aus, beispielsweise wie $g(x)=x^3-2x^2+4$. Wie man von solchen Funktionen die Ableitung bestimmt kommt nun. Wir fangen mit den Vorfaktoren an… Was ist der Unterschied zwischen der Steigung von $f(x)=x^3$ und $h(x)=3x^3$? h(x) lässt sich ja auch so schreiben: h(x)=3f(x). Meint, erst einmal rechne ich f(x) aus und dann multipliziere ich mein Ergebnis mit drei. Gleiches gilt auch bei der Ableitung! Denn h‘(x)=3f‘(x). Faktoren erhalten sich, solange ein x dabei steht!

Beispiel 5
$b(x)=3x^2$. Dann ist nach der Faktorregel $b‘(x)=3\cdot 2x=6x$.

Beispiel 6
$f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{x}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-1/2}$. Dieses Beispiel ist bereits ziemlich komplex, doch formt man Schritt für Schritt um, so behält man auch hier den Überblick. Zuerst wurde der Faktor aus dem Bruch „abgespalten“, dann wird die Wurzel als Hochzahl umgeschrieben. Nun wird das „Einsdurch-Problem“ umgeschrieben und endlich haben wir die gewünschte Form. Die Lösung geht nun schnell: $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} = \frac{1}{3} \cdot x^{-3/2}$. Auch hier kann man noch einmal das Umformen von $x^{-3/2}$ üben. Denn das Minuszeichen lässt sich durch 1/… ersetzen: $\frac{1}{x^{3/2}}$. Dann entspricht der Bruch …/2 der Wurzel, während die Hochzahl 3 beim x verbleibt: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Der Vorfaktor 1/3 bleibt natürlich einfach stehen und so wäre insgesamt $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ festzuhalten. Ein schweres Beispiel!

Die Summenregel
Diese Regel ist eigentlich die einfachste. Wenn wir zwei Funktionen f und g betrachten, dann hat jede ihre eigene Ableitung f‘ bzw. g‘. Addiert man nun beide Funktionen, kann man erwarten, dass auch die Ableitungen zu addieren sind und dem ist auch so!

Beispiel 7
f(x)=2x, $g(x)=x^2$. f‘(x)=2, was klar ist, denn die Funktion ist einfach eine (Ursprungs-)Gerade mit der Steigung 2. Die Lösung ergibt sich aber auch aus der Faktorregel. g‘(x)=2x. Nun ist die Steigung von $2x+x^2$ aber einfach 2+2x.

Mit unseren drei Regeln können wir bereits ziemlich komplizierte Funktionen aufstellen. Eine wollen wir als Beispiel untersuchen:

Beispiel 8
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 7x^2 + 3x^3 - 170$. Für diese Funktion können wir sofort die Ableitung ausrechnen. Wegen der Summenregel können wir „summandenweise" ableiten. Das meint, dass wir Summand für Summand betrachten und am Ende alle Ergebnisse zusammenaddieren. Die Ableitung von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist $-0{,}5\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Für $7x^2$ finden wir nach der Faktor- und der Potenzregel 14x als Ableitung und ebenso geht es bei $3x^3$. Es ergibt sich hier $9x^2$. Nach unserem Zusatz ist die Ableitung von -170 einfach 0. Insgesamt ist also $g(x) = -0{,}5\frac{1}{\sqrt{x^3}} - 14x + 9x^2$.

Nun fehlen noch die Produkt- und die Kettenregel. Die Produktregel ist auch ziemlich einfach zu merken, die Kettenregel etwas „komisch". Sie ist aber aus mathematischer Sicht sehr bedeutsam.

Die Produktregel
Bisher haben wir Potenzfunktionen abgeleitet oder sie miteinander addiert und abgeleitet bzw. vorher noch konstante Faktoren „dranmultipliziert", um sie dann abzuleiten. Das ist nicht schlecht, aber was ist mit Produkten von Potenzfunktionen? Was ist also die Ableitung von $x^2 \cdot x^3$? Wir wissen das natürlich schon, denn es ist ja $x^2 \cdot x^3 = x^5$ und damit ist die Ableitung einfach $5x^4$. Es gibt dafür aber auch eine Regel, die wir nun formulieren. Sie lautet:

a(x)·b(x) abgeleitet ergibt **a'(x)b(x)+a(x)b'(x)**

Das scheint kompliziert, führt aber auch für unser kleines Beispiel zum richtigen Ergebnis:

Beispiel 9
Wir wählen $a(x)=x^2$ und $b(x)=x^3$. Dann müssen wir $a'(x)=2x$ und $b'(x)=3x^2$ bestimmen. Die Produktregel liefert dann $(2x)\cdot x^3+x^2\cdot(3x^2)= 2x^4+3x^4=5x^4$. Stimmt ja!

Beispiel 10
Wir wollen $c(x)=25x^3$ mit unserer neuen Regel ableiten. Dazu wählen wir $a(x)=25x$ und $b(x)=x^2$. Das geht, denn $c(x)=a(x)b(x)$. Hier sieht man schon, dass es oft viele Möglichkeiten gibt, die Produktregel anzuwenden. Das ist praktisch, denn so kann man oft „geschickt zerlegen". Nach der Produktregel ergibt sich dann $c'(x)$ aus $a'(x)=25$ und $b'(x)=2x$: $c'(x)=25x^2+25x\cdot(2x)=75x^2$. Das ist aber genau das Ergebnis, welches wir auch durch direktes Anwenden von Potenzregel und Faktorregel hätten finden können!

Die Produktregel wird dann richtig wichtig, wenn sich verschiedene Funktionensorten mischen wie zum Beispiel, wenn man Funktionen wie $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x^3}(x-5) + 9$ untersuchen möchte. Hier ist es unumgänglich, f in „einfachere" Teilfunktionen zu zerlegen. Es ist ein bißchen wie beim Legospielen, man baut sich aus einfachen Bauteilen komplizierte Gebäude. Selbes geht auch mit der sogenannten „Verkettung" von Funktionen. Nehmen wir diese „Bauanleitung": Nimm dir ein x„ verdreifache es, addiere 5 und logarithmiere das Ergebnis. Dies bedeutet dann (lies „von innen nach außen"!): $f(x) = log(2x+5)$. Wie man sieht, kann man schnell aus einfachen Operationen komplizierte Terme erstellen. Wie sieht hier die Ableitung aus? Die Kettenregel hilft uns und wir werden sie an einem einfachen Beispiel einführen:

Beispiel 11, erster Teil
$z(x)=(4x+2)^2$. Wir könnten hier auch ausmultiplizieren und mit den alten Regeln ableiten. Man findet dann 32x+16 (rechne nach!). Nun stellen wir uns z(x) aber als eine geschachtelte Bauanleitung vor wie: Nimm x, vervierfache und addiere 2. Das ist der erste Schritt. Dann sollst du das Ergebnis quadrieren. Also ist z(x)=g(**h(x)**), wobei h(x)=4x+2 lautet und in $g(y)=y^2$ eingesetzt wird.

Die Ketten regel sagt nun, dass die Ableitung einer „Schachtel" g(h(x)) einfach g'(h(x))·h'(x) lautet. Probieren wir das an unserem Beispiel 11 aus:

Beispiel 12, zweiter Teil
h(x)=4x+2 bedeutet, dass h'(x)=4 ist. $G(y)=y^2$ heißt, dass g'(y)=2·y lautet. Nutzen wir nun die Kettenregel, dann finden wir für die Schachtel $z(x)=(\mathbf{4x+2})^2$ die Lösung z'(x)=2·(4x+2)·4=32x+16. Stimmt!

Die Kettenregel ist auch sehr einfach, doch oft unübersichtlich und eben einfach ungewohnt. Übung macht den Meister. Wir können an dem letzten Beispiel 12 noch einmal die Produktregel und die früheren Regeln überprüfen:

Beispiel 12, dritter Teil
Wir verwenden nun für die Funktion z(x) die Zerlegung z(x)=(4x+2) · (4x+2) und können so die Produktregel anwenden. Dafür müssen wir die beiden Ableitungen der Klammern bestimmen, die praktischerweise beide 4 lauten. Nun muss also nach der Produktregel die Ableitung z'(x) wie folgt lauten: z'(x)=4·(4x+2)+(4x+2)·4=16x+8+16x+8=32x+16. Auch hier kommt das richtige Ergebnis heraus.

Wer bisher nicht nachgerechnet hat… Hier Beispiel 12 ganz „klassisch" gelöst:

Beispiel 12, vierter Teil
$z(x)=(4x+2)^2=(4x)^2+2\cdot(4x)\cdot 2+2^2=16x^2+16x+4$. Dann ist aber z'(x)=32x+16. Voilá.