EI 9a 2011-12	MATHEMATIK Lösung der 1. Probearbeit	$3^{-2} = \frac{1}{9}$

1. Aufgabe

Berechne:

a) 2^3	e) $0{,}1^5$	i) $(\sqrt{3})^2$
b) 3^2	f) $(\frac{2}{3})^3$	k) $(\sqrt{2})^4$
c) $2 \cdot 3$	g) $(\frac{3}{2})^2$	
d) $0{,}2^3$	h) $(-\frac{1}{2})^5$	

a) 8, weil $2 \cdot 2 \cdot 2=8$.

b) $3^2=3 \cdot 3=9$.

c) 6, klar.

d) $0{,}2^3=0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2=0{,}008$.

e) $0{,}1^5=0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$. Das ist allerdings etwas nervig. Besser, man sieht, dass 0,1 gerade 1/10 ist. Dann hat man $(1/10)^5=10^{-5}$ und man notiert 0,0001.

f) 2/3 hoch 3 ist 2^3 durch 3^3 oder 8/27.

g) 3/2 hoch 2 ist 3^2 durch 2^2 oder 9/4, was 2,25 ist. Das ist das gleiche wie wenn man zuerst 3/2 als 1,5 schreibt und dann 1,5 mal 1,5 rechnet!

h) -1/2 hoch 5 bedeutet: $(-1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-1/2)$, das ist insgesamt schon einmal negativ (es sind 5 Minuszeichen; eins „überlebt“). Und dann hat man $1/2^5=1/32$, insgesamt also -1/32.

i) Die Wurzel und $()^2$ heben sich gerade weg; das ist 3.

k) Wir haben viermal die Wurzel aus 2. Schon zweimal die Wurzel ergibt 2. Insgesamt haben wir also 2 mal 2 oder 4 als Ergebnis!

2. Aufgabe

Gib die Potenzen bzw. Zahlen an, die den selben Wert wie -2^5 haben.

A: $-(2^5)$	C: $(-2)^5$	E: -32
B: -10	D: $-(-2)^5$	F: (-2^5)

-2^5 ist so zu lesen: Mache $2^5=32$ und setze dann ein Minus vornedran. Damit ist A identisch. B ist ganz falsch, aber C stimmt wieder: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ ist auch negativ wegen der 5 Minuszeichen und wieder entsteht -32. D ist das negative von

C, also +32 und damit nicht das gleiche wie -2^5. E passt! F auch, denn die äußere Klammer spielt ja gar keine Rolle, man könnte sie weglassen und dann ist es das gleiche wie -2^5.

3. Aufgabe

Entscheide, welche Ergebnisse richtig sind.

a) $5^{-2} = -25$ d) $5^{-2} = \frac{1^2}{5}$ g) $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3$

b) $5^{-2} = -5^2$ e) $(\frac{1}{2})^{-3} = -\frac{1}{8}$ h) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

c) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ f) $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

a) ist falsch, denn 5 hoch -2 bedeutet $1/5^2$!!! Das ist aber 1/25.

b) ist wieder falsch! -> siehe a).

c) ist genau richtig.

d) ist falsch, denn richtig ist ja 1/25.

e) ist wieder falsch. 1/2 hoch -3 bedeutet 1 geteilt durch $(1/2)^3$. Hier haben wir einen Doppelbruch; es ist jetzt 1 durch 1/8 zu teilen. Das ist dann 8, aber sicher nicht -1/8!!!

f) stimmt, denn auch hier ist wieder ein Doppelbruch zu bilden wie in e)!

g) stimmt auch wieder, ist ja das gleiche wie f).

h) stimmt, hatten wir aber noch nicht. Wir hatten das nur für die normale Wurzel.

4. Aufgabe

Wahr oder falsch?

a) $(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$ e) $a^7 - a^3 = a^4$

b) $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ f) $a^{12} \cdot (\frac{1}{a})^{12} = 1$

c) $\frac{a^7}{b^7} = (\frac{a}{b})^7$ g) $-a^4 + (-a)^4 = 0$

d) $a^b \cdot b^a = (ab)^{ab}$ h) $((-2)^2)^3 = -2^{2^3}$

a) ist korrekt, denn du hast in $(a \cdot b)^5$ gerade 5 Faktoren von a wie auch 5 Faktoren von b! Das steht auch rechts.

b) ist falsch! Für a=1 und b=2 sieht man es sofort; $(1+2)^3=3^3=27$, aber $1^3+2^3=9$. Man müsste die $(\ldots)^3$ ausschreiben als ()· ()· () und ausmultiplizieren!

c) ist richtig! Gleicher Exponent und geteilt durch, das kann man zusammenfassen!

d) ist falsch! Hier sind die Hochzahlen verschieden und das geht so nicht! Man könnte sich das an einem Gegenbeispiel klar machen, indem man bspw. a=2 und b=3 setzt.

e) ist falsch! Wäre anstelle des Minus in der Mitte ein Geteilt, wäre es richtig.

f) stimmt, denn die Hochzahl ist gleich. Dann kann man (a mal 1/a) hoch 12 rechnen, aber (a mal 1/a) ist ja 1 und 1 hoch 12 bleibt 1.

g) stimmt auch wieder. Denn $(-a)^4$ ist einfach a^4. Das liegt daran, dass du viermal –a malnimmst und so 4 Minuszeichen sich gegenseitig fressen. Jetzt hast du $-a^4+a^4$, aber das ist 0.

Bei h) muss man aufpassen. Links steht die -2 hoch 2, also $(-2) \cdot (-2)=4$. Das soll dann noch hoch 3 genommen werden, also $4^3=64$. Rechts wiederum haben wir ein Minuszeichen ganz vorne und das kann nichts werden mit der Gleichheit.

5. Aufgabe

Vereinfache die Terme soweit wie möglich.

a) $a^7 \cdot b^2 \cdot (ab)^4$

b) $\frac{(x^2 \cdot y)^7}{(x \cdot y^2)^7}$ c) $\frac{x^3 \cdot (y^2 \cdot z)^3}{x^4 \cdot z^6}$

In a) kann man $(ab)^4$ als a^4b^4 notieren. Dann kann man die as und die bs verrechnen. Man erhält $a^{11} \cdot b^6$.

Bei b) hat man oben 14mal das x und 7mal das y. Unten sind es 7mal das x und 14mal das y. Bleiben also nach kürzen oben 7mal das x und unten 7mal das y. Kurz notiert also x^7/y^7.

Für den Bruch in c) kann man oben 3mal x, 6mal y und 3mal den Faktor z festhalten. Unten sieht man die x und die z sofort. Nach kürzen verbleibt unten noch ein x und z^3. Oben „überleben" alle y, also y^6. Wir notieren: $y^6/(x \cdot z^3)$.

6. Aufgabe

Schreibe als eine Potenz.

a) $b^5 \cdot b^{-11}$ d) $z^{2n} \cdot z^{n-1} \cdot z^{1-3n}$

b) $(b^{-2})^3 \cdot b^6$ e) $3^{2m} \cdot 6^{2m}$ g) $\frac{3^{2r-4}}{3^{-r-5}}$

c) $(b^{n+2})^2 : b^n$ f) $49^{2k-3} : 7^{2k-3}$ h) $4^{-s} \cdot 12^s$

Für a) kann man b^{-6} notieren! Gleiche Basis und ein Malpunkt; die Hochzahlen addieren sich und 5+(-11)=-6.

Für b) findet man 1. Das ist so, denn wir haben $b^{-2}=1/b^2$. Wegen dem $()^3$ haben wir damit aber $1/b^2 \cdot 1/b^2 \cdot 1/b^2 = 1/b^6$. Das kürzt sich gerade.

c) hat ziemlich viele Buchstaben! Wir haben vorne wegen dem $()^2$ folgenden Ausdruck: $(b^{n+2})\cdot(b^{n+2})$. Das ist aber wegen gleicher Basis einfach b^{2n+4}! Die Hochzahlen addieren sich ja. Nun teilen wir durch b^n. Also ziehen wir n von 2n+4 ab und es ergibt sich b^{n+4}. Wenn dir das sehr abstrakt vorkommt, solltest du mal für b=10 setzen und für n zum Beispiel 5 und die Aufgabe noch einmal lösen!

d) ist ein Produkt dreier Potenzen gleicher Basis. Daher addieren sich die Hochzahlen! Einfach machen: wir haben oben 2n+(n-1)+(1-3n) = 2n+n-1+1-3n = 0. Insgesamt ist das also $z^0=1$. Jede Zahl hoch 0 ist 1, das ist eine Konvention!!!

e) Wir haben 2m Faktoren der 3 und 2m Faktoren der 6. Also haben wir 2m Faktoren $(3\cdot6)=18$. Man notiert als Ergebnis 18^{2m}.

f) Auch hier stimmen die Hochzahlen wieder überein. Wegen des Geteiltzeichens kann man 49/7 bilden, was 7 ergibt. Also ist das Ergebnis 7 hoch der komische Ausdruck 2k-3!

g) Hier hat man die gleiche Basis und geteilt. Also muss man die Hochzahlen voneinander abziehen. Dazu rechnet man (2r-4) – (-r-5), was wegen der Minusklammer zu 2r – 4 + r + 5 = 3r+1 wird. Insgesamt hat man also 3^{3r+1}.

h) 4^{-s} kann man als $1/4^s$ notieren. Dann hat man 12^s geteilt durch 4^s. Gleiche Hochzahl und geteilt, d.h. wir können 12/4=3 ausrechnen und notieren als Ergebnis 3^s.

7. Aufgabe

Die Kantenlänge eines Würfels ist 10cm groß.

a) Berechne das Volumen des Würfels in Litern.

Das Volumen ist hier Höhe mal Breite mal Tiefe, also 1000cm³ $(10\cdot10\cdot10)$. In Litern wäre es gerade 1 Liter, denn 1 Liter ist das gleiche wie 1dm³ und 10cm=1dm!

b) Wenn man alle Kantenlängen um den Faktor 2 vergrößert (anschaulich wird der Würfel „aufgeblasen“); wie groß ist dann das Volumen in Litern?

Hier kann man sofort fertig sein, wenn man sich überlegt, dass man drei Faktoren 2 in die Rechnung bekommt. Damit verachtfacht sich das Ergebnis zu 8 Litern. Per Hand würde man 2dm mal 2dm mal 2dm rechnen.

c) Berechne die Oberfläche des neu enstandenen Würfels und vergleiche das Ergebnis mit der Oberfläche des vorherigen 10cm-Würfels!

Die Oberfläche eines Würfels ist 6mal Höhe mal Breite, denn das entspricht den 6 Seitenflächen. Damit wäre beim ursprünglichen Würfel $6\cdot100$cm²=600cm² zu rechnen.

Beim neuen Würfel hat man sowohl bei der Höhe als auch bei der Breite einen Faktor 2 drinnen und man rechnet $6\cdot400$cm²=2400cm². Das ist (wenig verwunderlich) gerade das 4fache der anderen Fläche!

8. Aufgabe – Zusatzaufgabe (weil es geht um Wurzeln!)
Der kleine Steffen hat drei seiner würfelförmigen Bauklötze aufeinander gestapelt. Sie haben ein Volumen von $300cm^3$, $120cm^3$ bzw. $60cm^3$. Welche Höhe hat der Bauklotz-Turm?

Hier muss man etwas rückwärts rechnen!

Bei 6,7cm Kantenlänge kommt man auf ca. $300cm^3$ (wegen $6{,}7 \cdot 6{,}7 \cdot 6{,}7 = 300{,}763$). Das kann man durch Probieren finden oder aber, indem man 300 hoch 1/3 nimmt (was wir aber noch nicht wissen).

Gleiches probiert man für 120 und für 60 und findet die Kantenlängen 4,9cm bzw. 3,9cm.

Damit muss der Turm ca. 15,5cm hoch sein, denn die Kantenlängen liegen ja übereinander und addieren sich so!