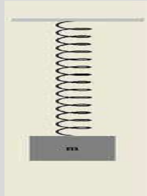
EI PH3 2010-11	*PHYSIK* Herleitung der Schwingungsgleichung am Federpendel	

Man kann die von uns im Experiment überprüfte Schwingungsgleichung des Federpendels direkt aus den wirkenden Kräften herleiten. Das ist mathematisch anspruchsvoll (aber eigentlich wie immer nicht schwer!) und somit kein Pflichstoff für euch!

Herleitung

Wir wissen ja bereits, welche Kräfte beim Federpendel wirken: Es ist die Gravitation in Form der Gewichtskraft der angehängten Masse m, $G=mg$ und die rückstellende Federkraft (die Feder will in ihre ungedehnte Form zurück) $F=Ds$.

Überwiegt die Federkraft, dann geht die Bewegung in die Richtung dieser Kraft (nach oben), überwiegt die Gewichtskraft, fällt die Masse wieder nach unten. So entsteht die Schwingung. Die sogenannte Ruhelage ist dabei die Position, die die Feder ohne vorherige Auslenkung einnehmen würde bzw. die Lage, in der die Schwingung im Realfall zum Erliegen kommt (wegen der Reibungskräfte).

Wir werden unsere Überlegungen von der Ruhelage aus beginnen. Dort hat die Feder genug Gegenkraft aufgebaut, um G zu kompensieren. Ziehen wir sie jetzt leicht nach unten, steigt die Federkraft und ist jetzt größer als G. Lassen wir los, kommt es ja dann zur Bewegung. **Verursacht allein durch die Federkraft!**

Was man jetzt investieren muss, ist die Formel $F=ma$. Diese Formel besagt, dass eine Kraft F eine Masse m beschleunigt (mit a). Das ist ja genau das, was wir oben schon beschrieben haben; gleichen sich die sich nicht ändernde Gravitationskraft mit der sich nach dem Hookeschen Gesetz ständig mit der Auslenkung ändernde Federkraft nicht aus, wird die Masse beschleunigt.

Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Weges. Auch das muss man wissen. Wenn du ein s(t)-Diagramm zeichnest, dann ist die Steigung die Geschwindigkeit. Steigung ist aber 1. Ableitung. Daher ist $s'(t)=v(t)$! Und dann schaut man sich das v(t)-Diagramm. Aus dem Alltag wissen wir, dass Beschleunigungen Geschwindigkeiten verändern. Im Auto heißt Gasgeben beschleunigen und v wird größer. Ist aber Beschleunigung a die Änderung von v, dann muss $v'(t)=a(t)$ sein! Und insgesamt ist $s''(t)=v'(t)=a(t)$!

Wie oben bereits gesagt, wissen wir, dass $F=ma$ durch $F=Ds$ verursacht wird. Dabei wird s von der Ruhelage aus gemessen und ändert sich mit der Zeit, daher schreiben wir ab jetzt s(t). Auch a wird sich dann ständig ändern! Denn mit s(t) ändert sich F und so muss auch a von t abhängen. Wir schreiben a(t). Noch eine wichtige Sache: Ist s unterhalb der Ruhelage, wird nach oben beschleunigt, ist s oberhalb der Feder, nach unten. Die beschleunigung ist also s vom Vorzeichen gerade entgegengesetzt! Daher das Minuszeichen in dieser Formel:

$$ma(t) = -Ds(t)$$

Die Gleichung sagt ja nur, dass die Beschleunigung a der Masse m durch die Position s der Feder bestimmt wird (und durch die Federhärte, weil je nachdem ist die Kraft größer oder kleiner…). Wir lösen nach a(t) auf und erhalten:

$$a(t) = -D/m \cdot s(t)$$

Wir wissen ja, dass a(t)=s‟(t) ist und ersetzen das a daher:

$$s''(t) = -D/m \cdot s(t)$$

Das ist eine komische Situation. Noch nie war die zweite Ableitung gleich der Ausgangsfunktion mit Vorfaktor. Oder doch? Eigentlich doch, denn sin(x) zweimal abgeleitet ist –sin(x)! Das passt (fast). Oder auch cos(x) zweimal abgeleitet ergibt –cos(x).

Leider ist der Faktor D/m dann noch nicht geklärt. Dazu brauchst du die Kettenregel, die du in Mathe ggf. gerade lernst. Mit diesem Ansatz geht es dann:

$$\mathrm{s(t)} = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Denn zweimal abgeleitet ist das gerade a(t) von oben; beim ersten Ableiten „hüpft" die Wurzel als innere Ableitung raus, beim zweiten wieder und insgesamt steht dann D/m davor. Passt.

Damit kann man bereits v(t) und a(t) ausrechnen (einfach ableiten…), was du selbst noch einmal üben kannst.

Wir fragen uns, wann diese Funktion gerade einen „Zyklus" beendet hat. Das ist dann eine gesamte Schwingung. Die dafür benötigte Zeit ist die sogenannte Schwingungsdauer T und diese wollen wir ja gerade berechnen!

Es gilt ja sin(0)=sin(2π). Für t=0 ist natürlich sin(0) gegeben. Für welches t ist aber der Ausdruck unter der Wurzel gerade $2\,\pi$?! Das ist ja dann T… In Formeln:

$$2\pi = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t \;\leftrightarrow\; 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = t$$

So einfach wars dann letztendlich! Damit sich die Schwingung wiederholt, muss T vergangen sein und das ist nach obiger Rechnung diese Zeit:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$