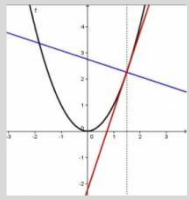
EI M5 2010-11	MATHEMATIK 2. Probeklausur - Pflichtteil	

1. Aufgabe (nochmal Ableitungsregeln) **(5 Punkte)**
Leite die folgenden Funktionsterme nach der Variablen ab und vereinfache sie!

$a(x) = sin(x)\, cos(x)$ $\qquad b(x) = xe^x$ $\qquad c(x) = e^{x^2+x}$ $\qquad d(x) = (x+1)\cdot\sqrt{e^x}$

a(x) kennst du schon… das geht mit der Produktregel, u=sin und v=cos und dann u'v+v'u bilden, was gerade a' ist: a'(x)=coscos+(-sin)sin=$\cos^2(x)-\sin^2(x)$.

b(x) ist wieder mit der Produktregel zu lösen. u=x, v=e^x. u'=1 und v'=v (halt e und praktisch!) und damit ist b'=e^x+xe^x. Lustig, das durchs Ableiten einfach ein e^x „dazu kommt".

c(x) geht eindeutig mit der Kettenregel! In der e-Funktion steht nochmal ein Ausdruck. Also müssen wir uns an „äußere Ableitung mal innere Ableitung" halten: die Äußere ist einfach wieder e hoch Krims (eben e!) und die „Innere" ist 2x+1. Also ist c'(x)=$(2x+1)\cdot e^{x^2+x}$.

d(x) ist erstmal ein Produkt, also geht es mit der Produktregel. Dann ist aber hinten nochmal eine Wurzel mit einer e-Funktion verkettet. Da ist also die Kettenregel angesagt. Egal, womit du anfängst, beides muss gemacht werden. ich überlege mir erst einmal, was die Ableitung von der Wurzel ist. Hier gibt es einen kurzen und einen langen Weg; der kurze wäre, einfach die Wurzel als „Hoch 1/2" zu deuten und dann mit der Hochzahl x malzunehmen. Denn es gilt einfach: $(e^x)^y=e^{xy}$. Also ist die Wurzel „bloß" $e^{x/2}$. Das abgeleitet (nach der Kettenregel) ist aber einfach $1/2\cdot e^{x/2}$. Der lange Weg wäre, die Wurzel NICHT zu verrechnen. Dann muss man $(e^x)^{1/2}$ ableiten, was $1/2\cdot(e^x)^{-1/2}$ mal die „Innere", also wieder e^x ist. Insgesamt ergibt sich dann $1/2\cdot(e^x)^{-1/2}\cdot e^x$. Auch hier kann man jetzt die beiden e-Funktionen zusammenfassen, es steht ja 1/Wurzel(e^x) mal e^x da und so bleibt im Zähler eine Wurzel übrig… So oder so, fertig sind wir noch nicht, denn es d(x) enthält auch noch den Faktor (x+1). Mit der Produktregel schreibt sich aber schnell das Endergebnis, da u'=1 ist: d'(x)=$1\cdot e^{x/2} + (x+1)\cdot 1/2\cdot e^{x/2} = e^{x/2} + 1/2(x+1)\, e^{x/2}$. Das ist als Ergebnis auch ok, man kann es aber noch zu d'(x)= $1/2(x+3)\, e^{x/2}$ zusammenfassen.

2. Aufgabe (Verständnisfragen) **(3 Punkte)**
Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Begründe kurz. *(Tipp: Gegenbeispiel)*

a) Ein Extremwert a einer Funktion f erfüllt immer die Bedingung f'(a)=0.

Ja, das ist so.

b) Gilt f'(a)=0, so ist a immer ein Extremwert für die Funktion f.

Das stimmt nicht! Es gibt auch Sattelpunkte…

c) Die Exponentialfunktion e^x besitzt keinen Extrempunkt.

Ja, das ist so. Liegt daran, dass die e-Funktion keine Nullstelle hat. Um einen Extrempunkt zu haben, müsste ja die Ableitung Null sein. Die Ableitung ist aber gerade wieder e^x und da das keine Nullstellen hat. Tja.

d) Die Funktion $1-e^x$ besitzt keine Nullstelle.

Das ist falsch! Denn für $e^x=1$ bzw. für $x=0$ gibt es eine (und nur diese).

e) Es gilt $e^2+e^3=e^5$.

Falsch. e^5 besteht aus 5 Faktoren der Zahl e! Das wäre so, wie wenn man sagen würde, $10^2+10^3=10^5$, wobei bekanntlich nicht 100+1000=100000 gilt!

f) Es gilt $e^2 \cdot e^3=e^6$.

Falsch! Denn hier die Zahl e auf der rechten Seite der Gleichung sechsmal als Faktor zu finden. Auf der linken Seite stehen zwei e's, die mit drei weiteren e's malgenommen werden. Das sind aber „nur" 5 und somit ist die Gleichung falsch.

3. Aufgabe (Tangentenprobleme) (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=3x^3-7x^2-4x$ für reelle x-Werte.

a) Bestimme die Tangente t für x=1.

t: y=mx+c mit unbekannter Steigung m und unbekanntem y-Achsenabschnitt c. Dank der Eigenschaft, Tangente für x=1 zu sein, gilt aber m=f'(1). Das rechnen wir erst einmal aus: $f'(x)=9x^2-14x-4$ und damit f'(1)=9-14-4=-9. Nun wissen wir c noch nicht. Für x=1 ist f(1)=3-7-4=-8. Also liegt der Punkt P(1|-8) auf der Kurve. Dieser Punkt liegt aber auch auf der Tangenten (soll er ja!!!) und damit können wir eine Punktprobe durchführen; $-8=-9\cdot1+c$. Dabei haben wir P in t eingesetzt. Dann ist aber c=1 und insgesamt gilt t: y=-9x+1.

b) An welcher Stelle schneidet die Tangente t die x-Achse?

Im Endeffekt ist hier „nur" nach der Nullstelle der Geraden t gefragt: 0=-9x+1 liefert dann einfach x=1/9.

4. Aufgabe (Normalenprobleme) (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x\cdot\cos(x)$ für reelle x-Werte.

a) Bestimme die Normale n für x=1. *(Tipp: cos(1)≈0,54 und sin(1)≈0,84)*

Das geht genauso wie in Aufgabe 3 nur mit dem Unterschied, dass wir für die Steigung der Normalen nicht direkt f'(1) nehmen, sondern den negativen Kehrwert. Also bestimmen wir wieder f'(x). Dazu muss man aber die Produktregel anwenden mit u=x und v=cos(x). f'=u'v+v'u=cos(x)+(-sin(x))x=cos(x)-xsin(x). Dass das etwas komisch aussieht, kann uns ziemlich egal sein, weil wir nur f'(1) brauchen. Dank dem Tipp errechnen wir f'(1) ungefähr zu 0,54-0,84=-0,30. Wir haben also die Tangentensteigung. VORSICHT: Da wir die Normalensteigung suchen, brauchen wir den negativen Kehrwert davon. m_n=10/3=3,33 (weil 0,3=3/10 und man ja den

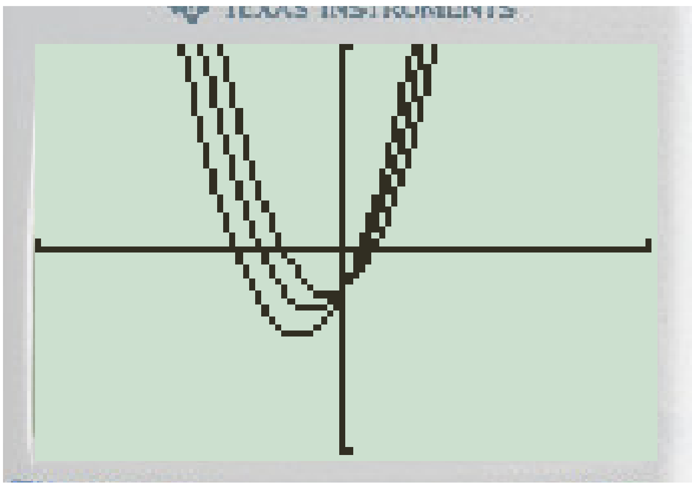
negativen Kehrwert bilden muss). Jetzt wieder eine Punktprobe. Dazu brauchen wir den y-Wert zur 1 und der ist einfach 0,54. Also ergibt sich für c Folgendes: 0,54 = 3,33·1+c oder eben c≈-2,79. Insgesamt notieren wir n: y=3,33x-2,79.

b) Unter welchem Winkel schneidet diese Normale n die x-Achse? *(Tipp: Vielleicht ist hier etwas dabei: $\tan^{-1}(-0{,}3) \approx -0{,}3$ bzw. $\tan^{-1}(-10/3) \approx -1{,}3$ bzw. $\tan^{-1}(10/3) \approx 1{,}3$)*

Hier kann man großartige Überlegungen anstellen, oder einfach die Formel tan(α)=m verwenden. Dann muss man den Winkel α finden, der die Gleichung tan(α)=3,33 löst. Daher ist der 3. Tipp gut und wir finden für α im Bogenmaß 1,3. Wer das nicht anschaulich findet, kann es umrechnen, aber ohne GTR macht das nicht so viel Sinn, da macht man sich lieber eine Skizze und liest ab...

5. Aufgabe (Kurvenschar im GTR) **(3 Punkte)**
Gegeben ist die Kurvenschar f_t über $f_t(x) = x^2 + tx - 2\ (t > 0)$ für reelle Zahlen x. Fertige für x-Werte zwischen -3 und 3 eine Skizze der drei Parabeln f_1, f_2 bzw. f_3 an (L.E. 1cm).

Hier hat man den GTR zur Verfügung und mit Y1=X^2+{1,2,3}*X-2 hat man schon alles getan. Einfach das Bild „abmalen" (mit der Vorgabe 1cm = eine Einheit).



6. Aufgabe – große Kurvenschar **(7 Punkte)**
Gegeben ist die Kurvenschar f_t über $f_t(x) = -tx^3 + x + t^2\ (t < 0)$ für reellen Zahlen x.

a) Liegt eine Symmetrie vor? Begründe kurz.

Nein! Es liegen nicht nur ungerade Exponenten vor, denn zu den beiden Ausdrücken mit x (beide tragen ungerade Potenzen, noch wäre es eine Punktsymmetrie) addiert man eine Konstante (dass das zufällig t^2 ist, ist völlig egal. Die Hochzahl bei t ist NICHT wichtig!).

b) Bestimme $f_3(0)$ und $f_4(1)$.

Einfach einsetzen! Für den ersten Ausdruck ist t=3 und damit ist $f_3(0)=3^2=9$. Für den zweiten Ausdruck ist t=4 und dann ist $f_4(1)=-4+1+16=13$.

c) Bestimme alle Wendepunkte der Kurvenschar.

Für einen Wendepunkt muss f‘‘=0 gelten. Also leiten wir zweimal ab und erhalten:

f‘(x)=-6tx. Das muss Null werden, also: 0=-6tx. Da t nicht Null sein kann (das steht ganz oben in der Aufgabe), teilen wir durch -6t und finden so x=0. Hier und nur hier kann ein Wendepunkt vorliegen. Zur Kontrolle bilden wir f‘‘‘(x)=-6t. Da t nicht Null sein kann, ist die 3. Ableitung ungleich Null und es liegt wirklich ein Wendepunkt bei x=0 vor. Der passende y-Wert ist ziemlich simpel; f(0)=t² und somit W(0|t²).

d) Bestimme die Ortskurve für den Wendepunkt bei x=0.

Die Ortskurve ist hier „doof“ (in der Arbeit wird es mindestens eine Parabel, versprochen!), denn der y-Wert „wandert“ mit wachsendem t zwar nach oben, aber der x-Wert bleibt immer Null. Daher ist die Ortskurve einfach die y-Achse, genauer eigentlich nur ihr Teil oberhalb der x-Achse, aber das ist auch egal.

7. Aufgabe (Anwendungsproblem zur e-Funktion) (8 Punkte)
Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei 36,5°C. Die Funktion f mit

$$f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t}$$

beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten. Dabei ist t>0 die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und f(t) die Körpertemperatur in °C. Der Erkrankte erhielt 5 Stunden nach Beginn der Aufzeichnungen (t=5) ein Medikament.

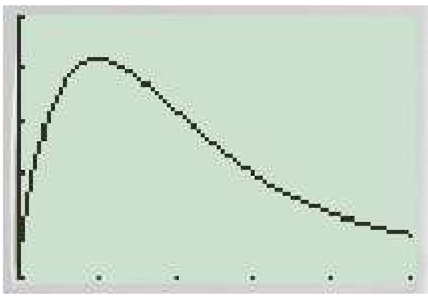
Diese Aufgabe ist übrigens (gekürzt) eine Abituraufgabe (Wahlteil Analysis 2009).

a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten? Wie hoch ist sie da?

Das geht mit der max-Funktion (oder anders…) mit dem GTR ganz einfach. Das Maximum liegt bei t=10 und f(10)=40,2. Der Kranke hat also nach 10 Stunden die höchste Körpertemperatur bei 40,2°C erreicht.

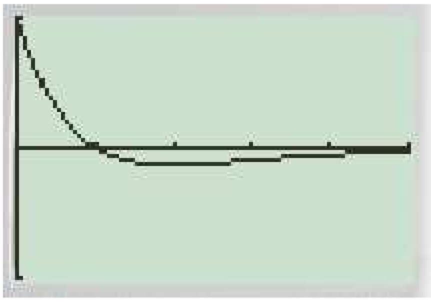
b) Skizziere die Fieberkurve für die ersten 48 Stunden in einem geeigneten Koordinatensystem.

Einfach die bereits eingegebene Funktion mittels WINDOW im X-Bereich von 0 bis 48 anzeigen lassen und abmalen. Die Y-Werte könnte man auf 36 bis 41 einstellen:



c) Zu welchem Zeitpunkt in dieser Zeit nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab?

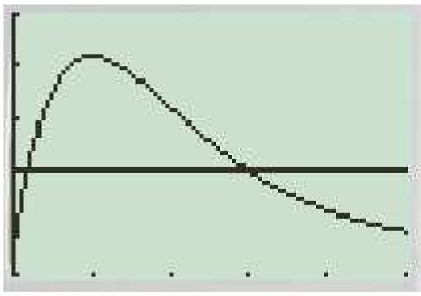
Hier braucht es eine kleine Idee. Am stärksten ändert sich die Temperatur, wo die Änderung am größten (bzw. am kleinsten, wenn es ums abnehmen geht). Also musst du f‘untersuchen. Einfach in Y2 mittels nDeriv die Ableitung bilden und dann ist das auch nicht so schwer. Allerdings passt das WINDOW erst einmal gar nicht, da die Temperaturänderungen relativ klein (und sogar negativ) sind. Nach Rumprobieren sieht es zum Beispiel so aus:



Durch Ablesen (oder min/max) findet man, dass die Temperatur am stärksten zu Beginn der Krankheit zunimmt und nach 20 Stunden am stärksten abnimmt.

d) Fieber hat man ab einer Körpertemperatur von 38°C. Wie lange hatte der Erkrankte Fieber?

Hier geht es wieder zurück zur Ausgangsgleichung. Also Y2 abschalten und Y1 wieder anschalten! Dann kann man einfach eine Gerade in Y3 eingeben: Y3=38. So hat man die „Kante", unterhalb der es noch kein Fieber ist und schaut mal nach, wann und wie lange die Temperatur darüber liegt. Man muss das WINDOW dazu wieder umstellen…



Mittels INTERSECT oder faul durch Ablesen (dazu aber bitte noch etwas hineinzoomen!) ergibt sich, dass der Patient nach ca. 1,7h Fieber hatte und dieses erst nach etwas unter 30 Stunden wieder los wurde.