EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* Lösung der 1. Probeklausur	**Ziel!**

Hier ausführliche Lösungen zur ersten Probearbeit. Falls ich mich mal vertan habe, dann sagt mir das bitte!

1. Aufgabe – Ableitungen

Leite ab und vereinfache!

a(x) = –sin(2x)   b(x) = cos(x²)   c(x) = $\frac{1}{2x+5}$ d(x) = $\sqrt{1+x^2}$

e(x) = cos(x)sin(x)   f(x) = $x\sqrt{x}$ g(x) = $x^3 - x^2+5$ h(x) = $(x^3+2)(x+1)$

a(x) ist eine Verkettung von v(x) = 2x und u(v) = –sin(v). v'(x) = 2 und u'(v) = –cos(v) und damit ist nach der Kettenregel a'(x) = –cos(2x)·2 bzw. a'(x) = –2cos(2x).

b(x) ist geht wie a(x); hier ist u(v) = cos(v) und v(x) = x^2. u'(v) = –sin(v), v'(x) = 2x und so ist b'(x) = –sin(x^2)·2x bzw. b(x) = –2xsin(x^2).

c(x) lässt sich mit den Potenzregeln umschreiben: c(x) = $(2x+5)^{-1}$. Dann ist das Ableiten wieder mit der Kettenregel möglich, wobei u(v) = v^{-1} ist und v(x) = 2x+5. Damit sind u'(v) = $-v^{-2}$ und v(x) = 2. Die Kettenregel liefert dann c'(x) = $-(2x+5)^{-2}\cdot 2$. Vereinacht: c'(x) = $-2/(2x+5)^2$.

d(x) lässt sich umschreiben zu d(x)=$(1+x^2)^{1/2}$. Dann haben wir wieder eine innere Funktion v(x)=1+x^2 und eine äußere Funktion u(v)=$v^{1/2}$. v'(x)=2x und u'(v)=1/2·$v^{-1/2}$. Insgesamt ist dann d'(x) = 1/2· $(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x = x/\sqrt{1+x^2}$.

e(x) ist ein Produkt zweier Funktionen u(x) = cos(x) bzw. v(x) = sin(x). Anders als bei Verkettungen sind hier beide Funktionen „gleichberechtigt" und werden nicht ineinander eingesetzt! Man errechnet u'(x) = –sin(x) und v'(x) = cos(x). Die Produktregel besagt, dass e'(x) = u'v+v'u ist. Hier also e'(x) = –sin(x)sin(x) + cos(x)cos(x) oder anders ausgedrückt e'(x) = $\cos^2(x) - \sin^2(x)$.

f(x) kann man mit der Produktregel berechnen (u(x)=x, v(x)= $\sqrt{x}$), aber mit den Potenzrechenregeln kann man die Wurzel umschreiben und findet so: f(x)=$x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}$. Dann ist f'(x)=$3/2\cdot x^{1/2}$.

g(x) ist eine „stinknormale" Funktion ohne Verkettungen oder Produkten und so findet man direkt g'(x)=$3x^2 - 2x$.

h(x) kann man auch „old style" lösen, indem man einfach ausmultipliziert. Alternativ bleibt die Produktregel mit u(x)=x^3+2 und v(x)=x+1. Wir wenden hier einmal die Produktregel an und finden u'(x)=$3x^2$ bzw. v'(x)=1. Dann ist h'(x) = $3x^2(x+1)+1(x^3+2) = 3x^3+3x^2+(x^3+2) = 4x^3+3x^2+2$.

2. Aufgabe – Terme

Vereinfache die Terme!

a) $\frac{(xy)^3\sqrt{z}}{y^2xz}$ b) $\log_4(16)$ c) $\log_3(27) - \log_3(9)$ d) $x^{3/2}\cdot y^{2/3}\cdot z^{-2}\cdot x^2\cdot z^{-1/3}$

a) und d) löst man, indem man oben alle x,y bzw. z „zählt". b) und c), indem man die Definition des log beachtet.

Zu a): $(xy)^3=x^3y^3$. Oben sind als drei x, drei y und ein halbes z. Unten finden sich ein x, zwei y und ein z. Insgesamt sind es also 3-1 mal das x, also x^2. Von den y bleibt eines oben übrig. Und z gibt es dann noch ein halbes unten, also ist der Bruch so vereinfacht: $\frac{x^2y}{\sqrt{z}}$.

Zu b): $\log_4(16)$ ist die Hochzahl, die man braucht, um von 4 auf 16 zu kommen. Das ist aber 2, denn es gilt ja $4^2=16$.

Zu c): Der erste log ist 3, denn $3^3=27$. Der zweite Ausdruck ist 2, denn $3^2=9$. Dann ist der Ausdruck insgesamt einfach 1.

Zu d): Auch hier sammeln wir wieder x, y und z… Es sind insgesamt 3/2+2 vom x, also 3,5. Es sind 2/3 vom y und es sind –2 – 1/3 vom z, also – 7/3: Der Term ist also $x^{3,5}\cdot y^{2/3}\cdot z^{-7/3}$.

3. Aufgabe – Verständnisfragen

a) Was ist der Definitionsbereich einer Funktion?
b) Stimmt es, dass eine konstante Funktion keine Änderungsrate besitzt?
c) Äußere dich mathematisch fachkundig zu dem Zitat „In der Mitte der Nacht liegt der Anfang eines neuen Tages".

a) Der Definitionsbereich ist die Menge, aus der man das x auswählen kann, bevor man es ins f „einsetzt". Der Funktionswert landet dann übrigens als f(x) im sogenannten Wertebereich.

b) Nicht ganz. Konstante Funktionen haben natürlich auch eine Änderungsrate, nur ist diese Null. Denn es tut sich ja nix; ändert sich x, ändert sich NICHT der Funktionswert. Die Ableitung ist daher auch Null.

c) Dieser auf eine Passage in der Bibel zurückgehende Ausspruch findet sich häufig auf Kirchenkerzen. Interessanterweise ist hier das Konzept der 1. Ableitung verborgen. Ist es am dunkelsten, dann kann es ja nur noch heller werden, klar. Auch vorher muss es heller gewesen sein, sonst wäre dort der dunkelste Zeitpunkt. Anschaulich beschreibt das den Tiefpunkt in einem Diagramm mit der Helligkeit auf der y-Achse. Da es nachts, wird es nicht mehr dunkler, wieder heller wird, ist die Änderung positiv und es wird immer heller, obwohl es noch stockfinster ist…

4. Aufgabe – Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + x^2$ für beliebige Kommazahlen x.
a) Ist diese Funktion in irgendeiner Weise symmetrisch?
b) Wie verhält sich f(x) für große positive Zahlen? Wie für große negative Zahlen?
c) Gib die Nullstellen von f an.
d) Besitzt die Funktion f Hoch- oder Tiefpunkte? Wenn ja, wie lauten sie?

Zu a): Die Funktion besitzt nur gerade Exponenten (4,2) von x. Also ist sie symmetrisch zur y-Achse.

Zu b): Für große positive Zahlen explodiert x^4. Allerdings steht noch ein Minus davor und so gehen die Werte gegen minus Unendlich. Wegen der Symmetrie gilt gleiches für negative Zahlen. Alternativ testet man bspw. x=-1000 und sieht, dass die Hochzahl 4 das Vorzeichen frisst… Das x^2 spielt übrigens ziemlich schnell keine Rolle mehr!

Zu c): Die Nullstellen kann man per Substitution herausbekommen, einfacher ist aber sicher, einfach mal aufzulösen: f(x) = 0 bedeutet $-x^4 + x^2 = 0$. Wir klammern x^2 aus. Dann haben wir $x^2(1-x^2)=0$ zu lösen. Ein Produkt wird immer Null, wenn einer der Faktoren 0 ist. $x^2=0$ bringt x1=0. Der zweite Faktor, $1+x^2$, liefert x2=1 bzw. x3=-1. Also haben wir 3 Nullstellen gefunden.

Zu d): Wenn die Funktion Hoch- oder Tiefpunkt besitzt, dann findet man sie per f'(x)=0. Wir leiten ab und erhalten $f'(x)=-4x^3+2x$. Also lösen wir $-4x^3+2x=0$. Wir klammern auch hier wieder ein x aus und finden damit sofort einen Kandidaten für Hoch/Tiefpunkte, nämlich x1=0: $-4x^3+2x=x(-4x^2+2)=0$. Und in $-4x^2+2$ stecken die übrigen Kandidaten: $-4x^2+2=0$ wird zu $2=4x^2$ bzw. zu $1/2=x^2$ und so sind mit x4=-wurzel(1/2) und x5=+wurzel(1/2) insgesamt drei Kandidaten für Hoch- oder Tiefpunkte gefunden. Wir testen mit der 2. Ableitung. Diese lautet $f''(x)=-12x^2+2$. Für x1=0 ist f''(0)>0 und hier ist ein Tiefpunkt. Den Punkt findet man, indem man den y-Wert über f(0) berechnet: $f(0)=-0^4+0^2=0$ und so ist T(0|0). Für x4 ist f'' negativ und hier ist ein Hochpunkt. Auch für x5 bleibt f''<0 und auch hier ist ein Hochpunkt. Beide y-Werte von x4 bzw. x5 sind übrigens wegen der Symmetrie gleich und so berechne ich nur einen. f(x5)= -1/4+1/2=1/4. H1(wurzel(0.5)|1/4) und H2(-wurzel(0.5)|1/4).

5. Aufgabe – Bestimmung von Steigungen

Bestimme für $f(x) = x^2\sin(3x)$ die Steigungen für x=-4, x=0 und x=4 mit deinem GTR. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Hier kann man jetzt den GTR einsetzen! Du gibst einfach nDeriv(x²sin(3x),x,-4) ein und schon hast du das Ergebnis. Gleiches für 0 und 4. Fertig.

6. Aufgabe – Reaktionen in der Biologie

Durch eine Labor-Messreihe von T von 0° bis 40°C hast du die beiden Funktionen R(T) und F(T) wie folgt bestimmt:

$$R(T) = \frac{\sqrt[3]{40-T}}{4} \qquad bzw. \qquad F(T) = \frac{2^{T/3}+100}{2000}$$

Bei welcher Temperatur ist in diesem Fall die Enzymaktivität am höchsten?

Hier muss man R(T) mit F(T) multiplizieren und davon das Maximum bestimmen. Im GTR kannst du einfach Y1=R und Y2=F eingeben. Danach kannst du über <VARS> das Y3 als Y1*Y2 definieren. Danach gehst du auf <GRAPH>, stellst ggf. noch das <WINDOW> richtig ein (von X=0 bis X=40 und Y muss man schauen). Über <max>, was man in <CALC> finden kann, löst du die Aufgabe und findest als optimale Temperatur T=38.5°C (gerundet).

7) Aufgabe – Optimierung in der Landwirtschaft

Du hast einen Zaun von 100km Länge und sollst damit eine möglichst große rechteckige Fläche einzäunen. Wie gehst du vor?

Die optimale Fläche ist ein Quadrat. Warum, sehen wir durch unsere Rechnung. Die Fläche eines Rechtecks ist ab, wenn x die Breite und y die Höhe ist. Nun gilt aber auch 2x+2y=100 (km), denn das ist die Gesamtlänge des Zaunes und so der Umfang unseres Rechtecks. Variiert man nun die Breite, so ändert sich entsprechend die Höhe. Mit der Umfangsgleichung findet man für y aber 2y=100-2x bzw. y=50-x. Also ist die Flächeninhaltsfunktion F(x,y)=xy auch als F(x)=x(50-x) aufzuschreiben. Diese Funktion zeichnet man per Y1 mit dem GTR, bestimmt mit <max> den Maximalwert und findet, dass bei x=25km der Flächeninhalt am größten ist. Damit ist aber auch y=25km (wegen der Umfangformel) und es ergibt sich wirklich ein Rechteck.

8) Aufgabe – Abbau von radioaktivem Iod

a) Wieviel Iod-131 ist mathematisch betrachtet nach einem Monat im Körper des Patienten?
b) Kannst du begründen, wieso der Körper das Iod schneller „verliert"?

Zu a): Nach 8 Tagen sind noch 50% da. Also gilt 50% = 100% $\cdot$ x^8 mit unbekanntem x. Wir teilen durch 100% und haben so $1/2=x^8$ zu lösen. Wir wurzeln mit der achten Wurzel und erhalten x=0.917 (gerundet). Nun entspricht einem Monat etwa 30 Tagen. Also lösen wir $1\text{mg}\cdot 0.917^{30}$, was etwa 0.07mg entspricht, was nicht mehr viel ist. Tipp für den GTR: das exakte x für die Rechnung bekommst du über <ANS> (also <2nd>+<(-)>).

Zu b): Der Körper scheidet natürlich immer Stoffwechselprodukte aus und darunter wird auch immer etwas Iod sein. Dadurch geht zusätzlich Iod verloren. Man verwendet daher auch eine sogenannte biologische Halbwertszeit, wenn man exakte Berechnungen durchführen muss. Diese Zeit liegt oft deutlich unter der physikalischen Halbwertszeit!