EI M5

2010-11

MATHEMATIK

Lösung der Zusatzaufgabe

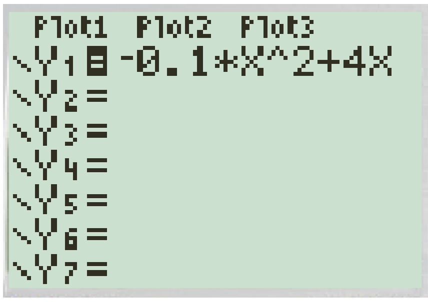
Aufgabe (mit GTR!)
Während eines Wolkenbruchs verändert sich der Wasserstand s in einem Überlaufbecken wie folgt:

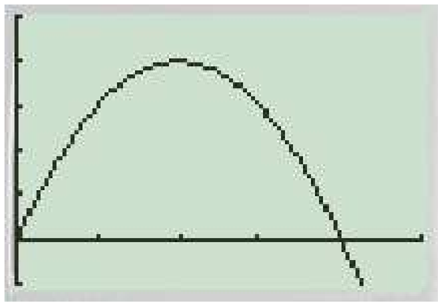
$$v(t) = -0{,}1t^2 + 4t \qquad \text{(t in Minuten, v(t) in Litern pro Minute)}$$

Positive v-Werte bedeuten einen Zufluss, negative v-Werte einen Abfluss. Vor Beginn des Regens befinden sich 100 Liter im Wasserbecken; es gilt also s(0)=100, wenn man s(t) in Litern misst.

Zuerst einmal mache ich mir klar, dass v(t) nicht den Wasserstand direkt beschreibt, sondern dessen Änderung; s und v hängen zusammen wie f und f'.

Im nächsten Schritt gebe ich erst einmal v(t) in Y1 meines GTRs und schaue, wie die Funktion überhaupt aussieht. Ich stelle mir das WINDOW passend ein und erhalte:





Jetzt habe ich eine Vorstellung; oberhalb der x-Achse bedeutet, dass Wasser dazukommt und ab t=40 beginnt das Ablaufen (oder Verdunsten oder so).

a) Bestimme den Zeitpunkt, an dem der Anstieg der Wassermenge maximal ist.

Damit ist der Hochpunkt im obigen Schaubild abgefragt, da dieses ja den Zufluss bedeutet. Über CALC und MAX finde ich schnell t=20. Ginge auch direkt über die Symmetrie der Parabel.

b) Gib einen Funktionsterm an, der den Wasserstand beschreibt (also: gib s(t) an).

Ich leite auf und nenne die Stammfunktion s(t):

$$s(t) = -0.1t^3/3 + 4t^2/2 + \text{beliebige Konstante} = -0.1t^3/3 + 2t^2 + c.$$

Beim Integral-Ausrechnen lassen wir c eigentlich immer weg. Hier macht es aber einen Sinn, sich zu überlegen, ob das c=0 ist oder nicht:

Wir wissen, dass s(0)=100 sein soll. Setzt man t=0 in s(t) ein, dann erhält man s(0)=c. Die beliebige Konstante c MUSS 100 sein. Ansonsten haut es nicht hin mit s(0). Also ist s(t) insgesamt:

$s(t) = -0.1t^3/3 + 2t^2 + 100$.

c) Wieviel Liter sind maximal im Überlaufbecken? Wann ist dies der Fall?

Wann, ist jetzt klar; bei $t=40$. Wieviel das maximal ist, geht auf zwei Wegen; entweder, ich integriere die Fläche unter der Parabel im Schaubild oben und erhalte so die zugeflossene Wassermenge (siehe Badewannen-Aufgabe). Das addiere ich dann zur Startmenge 100 Liter und bin fertig. Oder ich berechne einfach $s(40)$. Beides führt zur gleichen Lösung! Probier es aus! Man findet etwa 1167 Liter.

d) Bestimme die durchschnittliche Zuflussgeschwindigkeit bis zu diesem Zeitpunkt.

In 40 Minuten sind 1067 Liter zugeflossen (vorher 100, nachher 1167). Sprich im Schnitt waren es 1067/40 bzw. etwa 26,7 Liter pro Minute.

e) Wann befinden sich mindestens 1000 Liter im Becken?

Hier könnte man wieder über das Integral gehen und sich fragen, wann die Fläche unter $v(t)$ gerade 900 ist, denn dann hat man 100 zu Beginn und 900 zugeflossenes Wasser, macht insgesamt 1000 Liter. Einfacher ist aber sicher, das $s(t)$ zu zeichnen und in Y2 die Konstante 1000 einzutragen. Dann kann man mit INTERSECT den Schnittpunkt bestimmen. Dabei musst du aufpassen, dass das WINDOW wieder passt! Hier kann man auf xmax=1200 umstellen, dann passt es. Der GTR liefert $t=30$.

f) Wann ist die durch den Wolkenbruch zugeflossene Wassermenge wieder abgeflossen?

Hier muss $s(t)$ also wieder 100 werden. Auch hier kann man die Konstante 100 eingeben, stellt das WINDOW um, macht INTERSECT und erhält so $t=60$.

g) Wann ist das Becken komplett leer?

Das bedeutet ja, dass $s(t)=0$ ist, also einfach die Nullstelle ausgeben lassen. Bei mir kam etwa 61 Minuten heraus, ist aber nur grob.