

EI M5	MATHEMATIK	$\log_2(8)=3$
2010-11	Logarithmus	

Der „Logarithmus“ ist vielleicht ein Thema, das in keiner guten Erinnerung geblieben ist. Dabei ist es weder ein schweres, noch ein abstraktes Teilgebiet der Mathematik. Dass es nicht schwer ist, siehst du gleich und abstrakt ist das Thema auch nicht, denn unser Gehör arbeitet logarithmisch; schreien zwei Menschen so laut sie können, ist das für uns nicht doppelt so laut wie ein Schreihals. Am besten kannst du das überprüfen, wenn du in einem Stadion mit zigtausend Zuschauern stehst. Der Logarithmus gehorcht komisch aussehenden Rechenregeln. Bei Hochzahlen gilt die sogenannte „Funktionalgleichung“ wie  $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$  (*Merksatz: bei der Multiplikation zweier Ausdrücke mit gleicher Basis addieren sich die Hochzahlen*). Die Rechenregeln für den Logarithmus entstehen aus dieser einfachen Idee und sind daher selbst einfach. Nur leider etwas gewöhnungsbedürftig.

### 1. Station – Funktionalgleichung

Überprüfe die Gleichung aus der Textbox oben, indem du  $2^3$ ,  $2^2$  bzw.  $2^5$  explizit ausrechnest.

### 2. Station – Definition des Logarithmus

Wie ist der Logarithmus noch einmal definiert? Der Logarithmus ist eigentlich nur ein Kurzwort für einen etwas umständlichen Ausdruck: Du hast gerade  $2^3=8$  berechnet, richtig? Man nennt die Zahl 3 dann „den Logarithmus von 8 zur Basis 2“, kurz  $\log_2(8)=3$ . Daran ist nichts Schwieriges zu finden!

- Bestimme  $\log_2(8)$ ,  $\log_2(16)$ ,  $\log_4(16)$ ,  $\log_4(4)$ ,  $\log_2(2)$ ,  $\log_2(1)$  ohne GTR.
- Bestimme  $\log_3(3)$  und  $\log_3(27)$  ohne GTR. Was ist der Logarithmus von  $9 \cdot 27$  zur Basis 3? Fällt dir etwas auf?
- Berechne  $\log_{10}(1000)$ ,  $\log_6(216)$ ,  $\log_{10}(1)$ ,  $\log_2(1/2)$  ohne GTR. **Wir einigen uns darauf, dass wir für  $\log_{10}(a)$  einfach nur  $\log(a)$  schreiben!**
- Berechne mit dem GTR  $\log(8)$ ,  $\log(5)$  und  $\log(40)$ .

### 3. Station – Rechnen mit Logarithmen 1

Dass man mit Logarithmen rechnen wollte, hatte eigentlich einen ganz anderen Hintergrund als das Ohr. Denn beim Logarithmus gibt es auch eine Funktionalgleichung, die aber genau umgekehrt aufgebaut ist wie die oben genannte. Es gilt nämlich:  **$\log(ab)=\log(a)+\log(b)$** . Überprüfe diese Gleichung noch einmal mit den Werten aus 2.d)! Das Praktische ist, dass aus einem Produkt eine Summe wird. Eigentlich ist das ein Meilenstein in der menschlichen Entwicklung, aber wir haben an dieser Stelle leider keine Zeit, näher darauf einzugehen ☹

- Berechne  $\log(5 \cdot 200)$  über  $\log(5)$  und  $\log(200)$  und die obige Gleichung.
- Berechne  $\log(1000)$ , indem du  $\log(10)=1$  und die obige Gleichung verwendest!

### 4. Station – Reale Probleme lassen sich mit dem Logarithmus lösen 1

Mit dem Logarithmus lassen sich schnell Gleichungen bei Wachstumsaufgaben auflösen. Ein Beispiel: Bei 7% Zinsen (wo gibt es die heute noch!?) und 1000€ Startguthaben möchte ich wissen, wann sich mein Geld verdoppelt hat. Ich weiß, dass nach  $x$  Jahren  $1000 \cdot 1,07^x$  € da sind. Bitte mache dir die Gleichung klar! Dann muss ich nur noch das  $x$  finden, welches  $2000€ = 1000€ \cdot 1,07^x$  € löst, bzw.  $2 = 1,07^x$  nach kürzen von 1000€. Das schaffe ich mit dem Logarithmus. Ich weiß, dass  $x$  diejenige Hochzahl ist, die ich brauche, um mit der Basis 1,07 auf 2 zu kommen. Also gilt  $x = \log_{1,07}(2)$ . Was aber ist das?! Meinem Taschenrechner fehlt eine

$\log_{1,07}$ -Taste. Da ist nur eine  $\log$ -Taste (das ist für Basis 10) und eine  $\ln$ -Taste (das ist für die Basis  $e=2.7\dots$ , eine ganz wichtige Zahl in der Mathematik). Toll wäre eine  **$\log_b(x)$ -Taste** und ehrlich gesagt, **keine Ahnung**, wieso die nicht drauf ist. Wohl damit ihr das per Hand machen müsst...

## 5. Station – Rechenregeln mit Logarithmen 2

Wir waren bei dem Problem, dass wir mit dem GTR zur Basis 10 logarithmieren können, nicht aber zur Basis 1,07. Hätten wir 5% Zinsen, wäre es übrigens die Basis 1,05 geworden usw. Wir bräuchten unendlich viele Tasten auf dem Rechner... Doch man findet einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Logarithmen. Und zwar diesen hier:

- a) Dazu berechne bitte  $\log_2(64)$ ,  $\log_4(64)$ ,  $\log_8(64)$  und  $\log_{64}(64)$ . Stelle nun die Basis 4 als Zweierpotenz da, genauso 8 und 64.

Es gilt ja  $2^6 = 64$  wird  $\log_2(64)=6$  wird 64.  $4^3 = 64$  ergibt natürlich auch 64. Aber  $4 = 2^2$ . Also ist  $2^2$  hoch  $\log_4(64)$  eben auch 64. Nach den Potenzrechenregeln dürfen wir aber dann  $2^{2 \cdot \log_4(64)}$  daraus machen. Da  $4^3=64$  gilt, soll also  $2^6$  gerade 64 sein und das ist natürlich richtig. Teste das! Wir können also einen „Basiswechsel“ machen. Wenn es für 4 und 2 geht, warum dann nicht auch für 1,07 und 10? Und das geht!

## 6. Station – Rechenregeln mit Logarithmen 3

Schau dir die Zahl 5 an.  $\log(5)$  ist eine krumme Zahl, etwa 0,69897.... Es gilt aber  $10^{0,69897\dots}$  ist die glatte, runde 5. Das liegt daran, dass sich „10 hoch“ und „log(...)“ gegeneinander aufgehoben haben. Dann sollte doch auch  $10^{\log(1,07)}$  gerade 1,07 geben?

- a) Teste die obige Aussage!  
b) Wenn du jetzt 1,07 hoch 4 berechnen willst, kannst du im Prinzip auch  $(10^{\log(1,07)})^4$  ausrechnen, denn der komplizierte Ausdruck unten ist doch gerade 1,07. Und das kann dein Rechner! Berechne den Ausdruck  $(10^{\log(1,07)})^4$  und  $1,07^4$  und vergleiche. Außerdem wissen wir, dass man anstelle von  $(10^{\log(1,07)})^4$  auch einfach  $10^{4 \cdot \log(1,07)}$  schreiben darf. Überprüfe auch hier, ob dasselbe Ergebnis herauskommt!

## 7. Station – Reale Probleme lassen sich mit dem Logarithmus lösen 2

Zurück zu unserer Gleichung  $2 = 1,07^x$ . Bewaffnet mit GTR und damit mit dem Zehnerlogarithmus können wir unsere Prozentaufgabe lösen! Wir lassen auf beide Seiten der Gleichung den Ausdruck „10 hoch“ und  $\log(\dots)$  los. Im Prinzip machen wir damit ja gar nichts, denn eigentlich heben sich beide gegenseitig auf. Wir schreiben dadurch bedingt beide Seiten ziemlich aufgeblasen und kompliziert:  $10^{\log(2)} = 10^{\log(1,07^x)}$ . Wegen Station 5 bzw. 6 dürfen wir auf der rechten Seite das  $x$  vor den  $\log()$  ziehen und erhalten

$$10^{\log(2)} = 10^{x \cdot \log(1,07)}$$

Nun „springen“ wir in der Gleichung eine Ebene nach oben. Denn wenn die beiden Zahlen links und rechts gleich sein sollen, dann müssen wegen gleicher Basis 10 ihre Hochzahlen gleich sein. Also gilt hier  $\log(2) = x \cdot \log(1,07)$  bzw.  $x = \log(2)/\log(1,07)$ , was etwa 10 Jahren entspricht.

- a) Deine Tasse Tee hat  $80^\circ\text{C}$  und ist untrinkbar. Der Tee kühlt nach  $T(x) = 80^\circ\text{C} \cdot 0,96^x$  ab, wobei  $x$  in Minuten einzusetzen ist. Wann hat dein Tee angenehme  $40^\circ\text{C}$ ?  
b) Vor 24 Jahren war der Tschernobylunfall. Dabei kam Cäsium-137 mit einer Halbwertszeit von 30 Jahren in die Umwelt. Wieviel Prozent der damals ausgetretenen Menge sind heute noch vorhanden?