EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* Der Intgeralbegriff – Flächenberechnung und Stammfunktionen	$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Zum Rechnen per Hand brauchst du den Hauptsatz; siehe dazu das Tafelbild vom 22.02.2011. Um die Integrale mit dem GTR zu lösen, kannst du im Tafelbild vom 18.02.2011 nachsehen oder in der auf der Seite verlinkten GTR-Anleitung.

1. Station – Wasserstand in einer Badewanne

Du möchtest deine Badewanne (200 Liter) bis 10cm unter den Rand befüllen (weil das Wasser ja nochmal ansteigt, wenn du dich reinsetzt). Dies entspricht 150 Litern.

a) Du drehst den Hahn am Anfang voll auf. Du hast schlauerweise ein 500ml-Glas und hälst es kurz unter den Hahn. Nach 3s ist das Glas voll. Wie lange kannst du die Wanne aus den Augen lassen, bevor sie überläuft?

Hier geht es darum, via Dreisatz oder sonstwie die 0,5 Liter auf 200 Liter „hochzurechnen". 200l ist das 400fache von 0,5l, sprich, es dauert 400x3s=1200s oder 20min. *Wichtig für später: in diesen 20min gibt es einen konstanten Zufluss von 10 Litern pro Minute!*

b) Nach wieviel Minuten kommst du am besten wieder zur Wanne und drehst den Hahn zu, um deinen Wunschstand von 150 Litern zu erhalten?

Selbe Rechnung wie oben, nur diesmal sind es eben „nur" 150l. Mit 10l/min dauert das einfach 15min.

Kurz bevor du dich in die Wanne legst, fällt dir ein, das Du nach dem Archimedischen Prinzip etwa dein eigenes Volumen an Wasser verdrängst. Da deine Körperdichte etwa der Dichte von Wasser entspricht und du 70kg wiegst, verdrängst du etwa 70kg Wasser. Das heißt, dass 20l überlaufen! Da du zu faul zum Aufwischen bist, öffnest du den Stöpsel. Er gluckst und das überflüssige Wasser fließt ab. Da du in einem Wohnwagen wohnst, läuft das Wasser einfach auf den Rasen deines Stellplatzes. Auch hier prüfst du mit deinem Glas die Abflussrate und notierst dir 500ml in 8s.

c) Nach welcher Zeit musst du den Stöpsel wieder schließen, damit deine Wanne randvoll ist, wenn du drinnen bist?

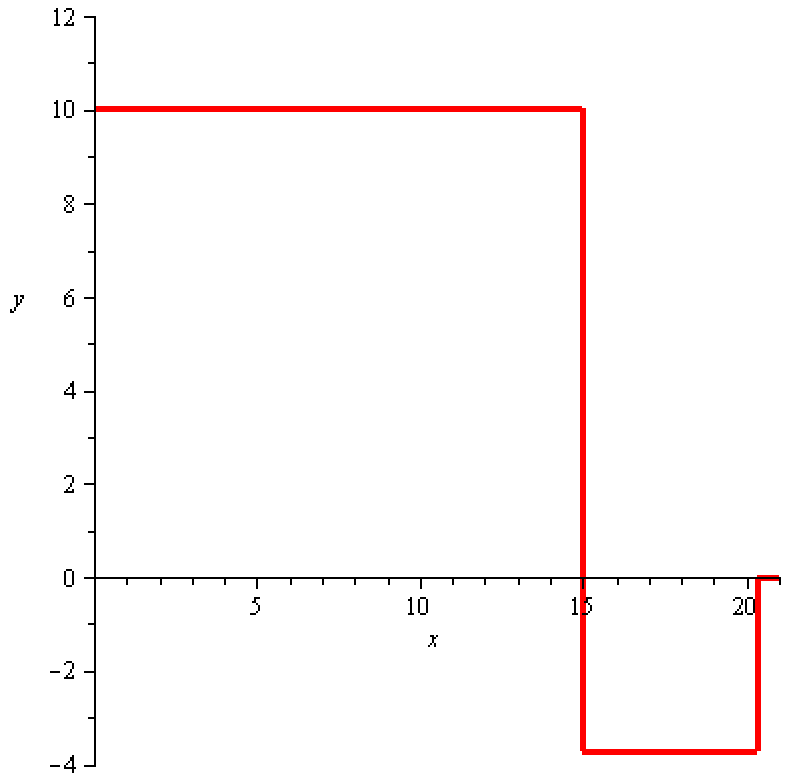
Die 20l sollen nicht überlaufen! Also sollen sie ablaufen und das tun sie mit 0,5l pro 8s bzw. wieder auf eine Minute hochgerechnet mit 0,5*(60/8) Liter pro Minute, was 30/8=15/4=3,75 Litern entspricht. Hier ist es aber ein Abfluss; man würde sich also -3,75l/min notieren.

Jetzt zum unpraktischen Teil:

d) Fertige ein Schaubild an, indem du die Zufluss- bzw. die Abflussrate der Badewanne gegen die Zeit aufträgst. Wähle sinnvolle Einheiten. Mache dir am Schaubild klar, welche

Fläche negativ zu zählen ist, wenn man die Wasserbilanz von 130 Litern daraus ablesen möchte.

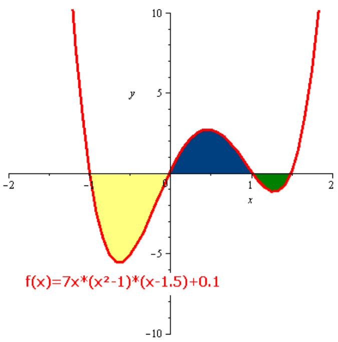
Zuerst das Schaubild:



Wobei hier die Achsenbeschriftungen fehlen!!! Die sind wichtig und zwar: x-Achse misst Zeit in Minuten und y-Achse misst die Zu/Abflussgeschwindigkeit in Litern pro Minute. Und ich ging hier davon aus, dass danach der Abfluss zu war und daher der Fluss bei 0 Litern pro Minute weitergeht.

Am Schaubild erkennt man zwei Rechtecke, eins oben, eins unten; die große Fläche oben sind die 150l reingeflossene Wassermenge und das Rechteck unten ist genau 20 groß und zwar 20l. Überprüfe das!

2. Station – Aufstellen von Integralen

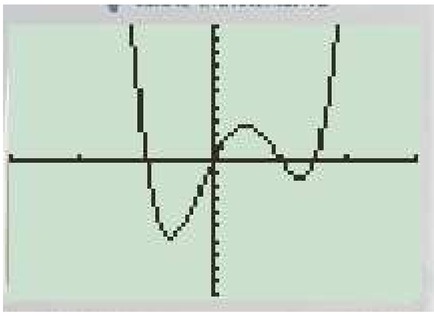


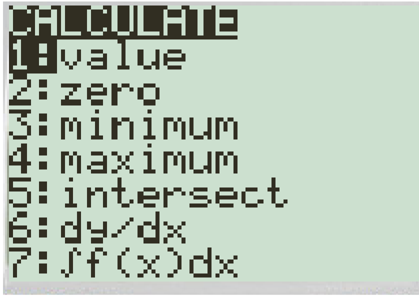
a) Notiere für die drei markierten Flächen das entsprechende Integral.

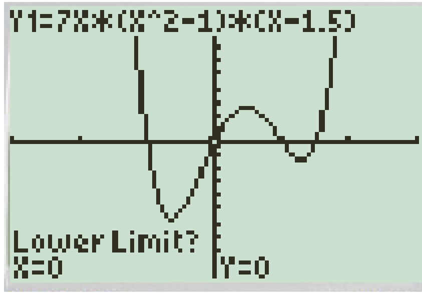
$$\int_{-1}^{0} (7x \cdot (x^2-1) \cdot (x-1{,}5) + 0{,}1)dx\,, \int_{0}^{1} (7x \cdot (x^2-1) \cdot (x-1{,}5) + 0{,}1)dx\,, \int_{1}^{1{,}5} (7x \cdot (x^2-1) \cdot (x-1{,}5) + 0{,}1)dx$$

b) Berechne den absoluten Flächeninhalt der blauen und der grünen Flächen mit dem GTR.
c) Berechne den orientierten Flächeninhalt der gelben und der blauen Fläche mit dem GTR.

Den absoluten Flächeninhalt bekommst du nicht direkt mit dem GTR! Zuerst berechnen wir das Integral von 0 bis 1 und dann das von 1 bis 1,5. Denn das grüne Integral wird negativ ausgegeben. Daher addieren wir die „nackten Zahlen" ohne Vorzeichen. Die bekommen wir via Y1=f(x) und über CALC:







Man gibt die Grenzen ein und bekommt für die zwei Flächen diese gerundeten Lösungen: blau=1,79 und grün=-0,36. Der absolute Flächeninhalt ist dann 1,79+0,36=2,35. Für die c) kann man es sich einfach machen und direkt von -1 bis 1 integrieren; das ergibt ca. -1,67.

Ein Zusatz: Die Zahl 0,1 im Funktionsterm macht eigentlich die Grenzen etwas ungenau; denn nicht genau bei 1 ist die Nullstelle… aber das macht sehr wenig aus!

3. Station – Finden von Stammfunktionen

Finde eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen:

a) $g(x)=x^2-4$
b) $h(x)=x^3+x^2+x+1$
c) $i(x)=x(x-2)$
d) $j(x)=\cos(2x)$
e) $k(x)=e^x$
f) $l(x)=1/x^2$

Mögliche Stammfunktionen wären: $G(x)=x^3/3-4x$, $H(x)=x^4/4+x^3/3+x^2/2+x$, $I(x)=x^3/3-x^2$. Hier muss man vorher ausmultiplizieren! $J(x)=0{,}5*\sin(2x)$. Der Faktor 0,5 frisst die 2 beim Ableiten! $K(x)=k(x)=e^x$. $L(x)=-1/x$. Hier muss man auf die Idee kommen, $1/x^2$ als x^{-2} zu schreiben!

4. Station – Nachweis von Stammfunktionen durch Ableiten

a) Überprüfe die Stammfunktionen von Station 3 durch Ableiten!

Das passt schon ;-)

b) Weise nach, dass $F(x)=e^{\sin(x)+3x}$ eine Stammfunktion von $f(x)=(\cos(x)+3)e^{\sin(x)+3x}$ ist!

Ein solches Nachprüfen bekommt man einfach, indem man F(x) ableitet und schaut, ob da zufällig f(x) rauskommt: F abgeleitet ist äußere mal innere Ableitung also e hoch (sin(x)+3x) mal (cos(x)+3x) und das ist genau f(x)!

c) Kanns du eine weitere Stammfunktion von f(x) angeben?

Klar, bspw. F(x)+5. Denn leite ich das ab, wird 5 zur 0 und F(x) ja wieder zu f(x).

5. Station – Berechnen von Integralen per Hand
Wende den Hauptsatz an! Interpretiere!

a) $\int_{-2}^{2}(x^3 - 4x)dx$ und überlege dir, wieso genau dieses Ergebnis rauskommt!

Hier kann man ggf. schon sehen, dass x^3-4x eine punktsymmetrische Funktion ist. Wenn man das hat, dann sind die Flächen symmetrisch, nur dass eine oberhalb und eine unterhalb der x-Achse liegt; in der Summe wird es Null!

Ansonsten: x^3 wird zu $x^4/4$ und 4x wird zu $4*(x^2/2)=2x^2$. Dann setzt man einmal 2 und einmal -2 für x ein und erhält: 16/4=4 bzw. 8. Für -2 kommen wegen – mal – gibt + die gleichen Werte heraus…

b) $\int_{0}^{2}(4x^2 + 4)dx$

Eine Stammfunktion ist $4x^3/3+4x$. Für x=2 ist das 32/3+8 und für x=0 ist das 0. Also insgesamt 8+32/3, was etwa 17 ist.

c) $\int_{-2}^{0}(4x^2 + 4)dx$ und vergleiche mit b). Was ist anders, was gleich?

Hier hatte ich mich scheinbar vertippt; diese c) ist jetzt die richtige! Dann hat man die gleiche Stammfunktion wie in b) und für x=0 wieder 0. Für x=-2 ergibt sich hier -32/3-8 und wegen obere Grenze minus untere Grenze ist das gesamte Integral dann gerade wieder 8+32/3. Also kommt der gleiche Wert wie in b) raus! Liegt an der y-Achsensymmetrie!

d) $\int_{1}^{3} x^3 dx$

Hier kann man erst einmal aufleiten zu $F(x)=x^4/4$. Dann bildet man F(3) und F(1) und subtrahiert: 81/4-1/4=80/4=20.

e) $\int_{0}^{1}(2x + 1)^3 dx$ und vergleiche mit d). Fällt dir etwas auf?

Hier könnte man eine neue Regel anwenden, die wir leider noch nicht kennen. Ich mache es mir mal einfach; der GTR liefert 10. Gerade die Hälfte von der d)! Ob das Zufall ist; nein! Dazu nach der Arbeit mehr. Um die 10 per Hand zu finden, muss man ausmultiplizieren und daher $(2x+1)^3$ ausmultiplizieren. $(2x+1)^3 = (2x+1)^2\cdot(2x+1) = (4x^2+4x+1)\cdot(2x+1) = 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 = 8x^3+12x^2+6x+1$. Das Ding müssen wir jetzt aufleiten: $8x^3$ wird zu $8x^4/4=2x^4$. $12x^2$ wird zu $12x^3/3=4x^3$. Dann wird 6x zu $6x^2/2=3x^2$ und die 1 wird zu x. Also ist $2x^4+4x^3+3x^2+x$ die Stammfunkion. Für x=0 ist F(0)=0, für x=1 ist F(1)=2+4+3+1=10. Also ist das Integral insgesamt 10-0=10.