EI 8a 2010-11	*MATHEMATIK* Wurzel von 2 ist irrational!	$x \cdot x = 2$

Hier kannst du dir den Nachweis durchlesen, dass die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt, keine Bruchzahl (=rationale Zahl) sein kann! Man nennt eine solche Zahl dann (logischerweise) nicht-rational oder kürzer: irrational.

Vorüberlegungen zu Bruchzahlen

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, stellen wir einige Vorüberlegungen zu Brüchen an. Eine Bruchzahl hat einen Zähler (Zahl oben) und einen Nenner (Zahl unten). Beide sind ganze Zahlen. Das heißt, dass jeder Bruch so zu schreiben ist:

$$Eine\ Bruchzahl = \frac{eine\ ganze\ Zahl}{andere\ ganze\ Zahl}$$

Also sowas wie 1/4 oder 7/3. Auch 10/1, was natürlich 10 ist, ist eine Bruchzahl. Oder -4/2 wäre -2. Stünde im Zähler (oben) die Zahl 1,5 und unten 4, dann würden wir erweitern und hätten 3/8… Wir bekommen es IMMER hin, uns an die oben notierte Darstellung von Bruchzahlen zu halten. Das ist für unseren Beweis absolut entscheidend!!!

Außerdem haben diese Bruchzahlen die (vielleicht langweilige) Eigenschaft, dass die Zahlen im Zähler und im Nenner ENTWEDER GERADE ODER UNGERADE sein können. Weil jede ganze Zahl ist ja entweder gerade (=durch 2 teilbar) oder eben nicht.

Welche Möglichkeiten haben nun Bruchzahlen, wenn man auf die Eigenschaft „gerade" bzw. „ungerade" der beiden Zahlen oben bzw. unten achtet:

1/3 ist im Zähler und im Nenner ungerade. 2/5 ist oben gerade, unten aber ungerade. 3/6 ist oben ungerade, aber unten gerade. 4/10 ist oben und unten gerade. Mehr Varianten gibt es nicht, es sind genau 4 Fälle.

Vorüberlegungen zu unser gesuchten Zahl x („Wurzel von 2")

Nun werden wir etwas konkreter, aber es ist immer noch eine Vorüberlegung. Wir nehmen gleich an, dass man diese Zahl x als Bruch notieren kann. Dann gibt es für diese Zahl x nur vier die vier verschiedenen Möglichkeiten (oben/unten gerade, oben gerade/unten ungerade, oben ungerade/unten gerade, oben/unten ungerade). Soweit so gut.

Wir wollen das x aber nicht in der Darstellung gerade/gerade haben. Wieso nicht? Weil man dann ja kürzen kann! In unserem Beispiel 4/10 wäre nämlich 2/5 dieselbe Zahl. Auch bei einem Beispiel wie 16/100 bekommt man nach kürzen der 2 die Zahl 8/50. Da immer noch beides gerade Zahlen sind: 4/25. Jetzt haben wir einen der anderen drei Fälle (ungerade/gerade, ungerade/ungerade bzw. gerade/ungerade) erreicht und zwar gerade Zahl durch ungerade Zahl.

Mit diesen Überlegungen kann es losgehen! Der Beweis…

Beweis

Wir suchen die Bruchzahl **x**, die die Gleichung $x \cdot x = 2$ löst. Als Bruchzahl ist **x** entweder ein Bruch einer geraden durch eine ungerade Zahl oder aber ein Bruch zweier ungerader Zahlen oder ein Bruch einer ungeraden Zahl durch eine gerade Zahl. Den Fall gerade durch gerade führen wir durch ausreichendes Kürzen mit der 2 in einen dieser 3 Fälle über.

Ohne jetzt genau zu wissen, welches diese Zahlen im Zähler und Nenner sind, nennen wir die Zahl im Zähler einmal **a** und die Zahl im Zähler einfach **b**. Dann schreibt sich **x** so:

$$x = \frac{a}{b}$$

Und da **x** die Gleichung $x \cdot x = 2$ löst:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

Das sieht noch nicht so aus, als wären wir dadurch schlauer. Aber wir erinnern uns an unsere drei Fälle. Entweder ist **a** ungerade und **b** auch oder die eine Zahl ist gerade und die andere nicht.

Wir werden jetzt zuerst annehmen, dass **a und b ungerade Zahlen** sind. Vielleicht ist das nicht so, aber wir probieren es. Vereinfachen wir erst einmal die Gleichung, indem wir zweimal mit **b** durchmuliplizieren:

$$a \cdot a = 2 \cdot b \cdot b$$

Dann steht auf der linken Seite ein Produkt zweier ungerader Zahlen. Dieses Produkt ist dann auch wieder ungerade. Auf der rechten Seite ist auch das Produkt b mal b ungerade. Aber dann nehmen wir es mal 2 und es wird gerade. Dadurch steht links eine ungerade Zahl und rechts eine gerade. **Das kann aber nicht sein!**

Schade! Also ist die Wurzel von 2 (also unser **x**) nicht ein Bruch aus zwei ungeraden Zahlen. Ist ja nicht weiter schlimm. Vielleicht ist der **Zähler a gerade und der Nenner b ungerade**? Probieren wir das einmal und schauen uns wieder diese Gleichung an:

$$a \cdot a = 2 \cdot b \cdot b$$

Jetzt steht links ein Produkt zweier gerader Zahlen und links mit 2x ungerade auch. Das könnte gehen?! Leider nein. Da **a** gerade ist, kann man ein **a** mit der 2 auf der rechten Seite kürzen. Dann steht rechts mit **b** mal **b** eine ungerade Zahl (weil **b** ungerade ist), während auf der linken Seite 100%ig sicher eine gerade Zahl steht, denn auch wenn wir ein **a** gekürzt haben, steht noch ein zweites **a** da. Und eine Zahl mal eine gerade Zahl bleibt gerade… Wieder nichts!

Wir halten fest: Wenn es eine Bruchzahl **x** gibt, die wir **a/b** schreiben, dann können nicht **a** und **b** gleichzeitig ungerade sein, aber es kann auch nicht sein, dass **a** gerade ist und **b** ungerade. Dann bleibt nur noch der Fall ungerade/gerade. Den vierten Fall, gerade/gerade haben wir ja bereits ganz oben durch Kürzen ausgeschlossen. **Also ist jetzt a ungerade und b gerade**. Wieder schauen wir uns diese Gleichung an:

$$a \cdot a = 2 \cdot b \cdot b$$

Da a ungerade ist, steht links eine ungerade Zahl. Rechts aber eine gerade Zahl. Wieder nichts.

Was bedeutet das?! Wir haben gezeigt, dass es nicht sein kann, dass es ein **x** gibt mit

$$\boldsymbol{x \cdot x = 2}$$

welches als Bruch geschrieben werden kann. Denn so ein Bruch wäre ja entweder von der Form gerade/ungerade, ungerade/gerade oder ungerade/ungerade.

In allen drei Fällen verwickeln wir uns in Widersprüche, weil dann eine gerade Zahl gleich einer ungeraden Zahl sein müsste und das geht ja bekanntlich nicht.

So geht ein mathematischer Beweis. Und daher haben wir „neue" Zahlen entdeckt bzw. erfunden…