EI 8a 2010-11	*MATHEMATIK* Arbeitsblatt Wahrscheinlichkeit	**gelöst!**

1. Aufgabe – Wahrscheinlichkeit ***(hier wird dann auch mal gerundet!)***

a) **Merksatz:**
Wahrscheinlichkeiten kann man immer **(nicht ganz. dann, wenn die Ausgänge alle gleichwahrscheinlich sind)** so berechnen:

$$\frac{Anzahl\ der\ guten\ Ausgänge}{Anzahl\ der\ möglichen\ Ausgänge}$$

Dann hat man einen Bruch aus zwei (natürlichen) Zahlen. Diesen kann man oft kürzen oder aber mit dem GTR ausrechnen. Das Ergebnis liegt dann zwischen 0 bzw 0% und 1 bzw. 100%.

b) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine gerade Zahl zu erwürfeln.**
Anzahl gute Ausgänge = 3 (Augenzahl 2,4,6), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(gerade)=3/6=0.5=50%.

c) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine ungerade Zahl zu erwürfeln.**
Anzahl gute Ausgänge = 3 (Augenzahl 1,3,5), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(ungerade)=3/6=0.5=50%.

d) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine 5 oder 6 zu erwürfeln.**
Anzahl gute Ausgänge = 2 (Augenzahl 5,6), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(5 oder 6)=2/6=0.33=33%. Auch kann man die beiden Einzelwahrscheinlichkeiten p(5)=17% bzw. p(6)=17% addieren. Man kommt so zwar auf 34%, aber das ist nicht schlimm! Wir haben ja gerundet…

e) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf eine Zahl kleiner gleich 4 zu erwürfeln.**
„Kleiner gleich" meint „entweder kleiner oder gleich"! Anzahl gute Ausgänge = 4 (Augenzahl 1,2,3,4), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(Zahl kleinergleich 4)=4/6=0.67=67%.

f) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl oder eine 5 zu erwürfeln.**
Anzahl gute Ausgänge = 4 (Augenzahl 2,4,6 **und 5**), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(gerade oder 5)=4/6=0.67=67%. Hier hätte man auch p(gerade)=50% aus Aufgabe 1a) nehmen und zu der Wahrscheinlichkeit p(5)=17% addieren können. Dann kommt man natürlich auch auf 67%!

g) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl kleiner 3 oder größer 4 zu erwürfeln.**
„Kleiner" meint wirklich kleiner! „Größer" meint wirklich größer! Die Anzahl der guten Ausgänge ist dann gleich 4 (Augenzahl 1,2,5,6), Anzahl mögliche Ausgänge = 6 (Augenzahl 1,2,3,4,5,6). Daher ist p(kleiner 3 oder größer 4)=4/6=0.67=67%.

2. Aufgabe – Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten

a) **Gib ein Beispiel eines Zufallsereignisses, bei dem die Eintritts-wahrscheinlichkeit 50% ist.**
p(gerade Zahl) beim Würfel!

b) **6 Richtige im Lotto kommen in einem von 14 Mio. Fällen vor. Drücke das in Prozent aus.**
p(6 Richtige) = 1/14.000.000 = 0.00000007. Der GTR gab hierfür 7E-8 aus. Damit meint er $7 \cdot 10^{-8}$, was heißt, dass du das Komma **um acht nach links** verschieben musst. In Prozent gibt's das Ergebnis, wenn wir mal 100 machen, also p(6 Richtige)=0.000007%.

c) **Findest Du, dass 6 Richtige im Lotto sehr wahrscheinlich sind? Nimm an, du spielst 100mal im Jahr. Wie lange wirst du etwa spielen müssen, um ziemlich sicher einmal diese 6 Richtige zu bekommen?**
Das ist nicht sehr wahrscheinlich! Ich müsste 140.000 Jahre spielen, um eine gute Chance zu haben, einmal zu gewinnen… Das haben wir so berechnet: Für jedes Jahr kommen 100 Spiele für mich dazu. Nach einem Jahr 100, nach 2 habe ich 200, nach 10 Jahren schon 1000 Spiele und nach 1000 Jahren wären es 100.000 Spiele! Allgemein sind es nach x Jahren einfach 100 mal x Spiele. Dann frage ich mich ja jetzt, wie groß muss x sein, damit ich genau auf 14.000.000 Spiele komme!? Das geht dann so:

$$100x = 14.000.000 \mid :100$$

$$x = 14.000.000/100 = 140.000$$

d) **Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes ein Junge ist, beträgt 51,4%. Was bedeutet das?**
Das bedeutet, dass mehr Jungen geboren werden als Mädchen. Außerdem heißt das, dass es in 48,6% der Fälle ein Mädchen wird. Siehe dazu Aufgabe 3!

e) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler der Klasse weiblich ist.**
Ihr seid 27 Schüler, 14 Mädchen und 13 Jungs. Dann ist p(Mädchen)=14/27=51,8%.

f) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler der Klasse blond ist.**
Da ich nicht nachgezählt habe, wieviele Blonde es bei euch gibt, entfällt hier die Lösung!

g) **Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler der Klasse braune Augen hat.**
Da ich nicht nachgezählt habe, wieviele Braunaugen es bei euch gibt, entfällt hier die Lösung!

3. Aufgabe – Ereignis und Gegenereignis

a) **Bestimme zu allen Ausgängen der 1. Aufgabe die Gegenereignisse und überprüfe, ob die Summe der Wahrscheinlichkeiten 100% ergibt.**
Das ist eine einfache, aber etwas nervige (weil lange) Aufgabe. Ich mache daher nur ein Beispiel:
Zur 1e) p(Mädchen)=14/27. p(Junge) wäre dann angeblich 1 – p(Mädchen). Das ist aber: 1 – p(Mädchen) = 1 – 14/27 = 27/27 – 14/27 = 13/27. Das stimmt, denn es sind ja 13 Jungs in der Klasse. Auch über Prozente kommt man zur Lösung: 100% – 51,8% = 48,2%, was gerundet 13/27 ist.

b) **Was ist das Gegenereignis zu „Schüler hat grüne Augen", wenn man die Augenfarbe kontrolliert?**
Ob ein Schüler jetzt braune oder blaue Augen hat, ist nicht wichtig. Er hat nur keine grünen Augen! Wäre p(grüne Augen)=30%, dann wäre p(nicht grüne Augen) eben 70%.

4. Aufgabe – Durchschnitt

a) **Berechne den Durchschnitt von 2, 4 und 17.**
   2+4+17 = 23. 23 durch 3 (soviele Zahlen haben wir hier) ergibt etwa 7,7.
b) **Berechne den Durchschnitt von 3, 3, 2, 1 und 5.**
   3+3+2+1+5 ist 14. 14/5 ist 2,8. Das ist der Durchschnitt!

5. Aufgabe – Erwartungswert
Der Erwartungswert ist die Zahl, die wir bei einem Zufallsexperiment als Ergebnis erwarten. Für einen sechsseitigen Würfel erwarten wir exakt den Durchschnitt 3,5. Begründe dies!
Naja, der durchschnittliche Wurf ist ja 1+2+3+4+5+6 geteilt durch 6. Also 21/6=3,5. Dieses Wort erwarten ist etwas komisch; natürlich glaube ich nicht daran, dass ich eine 3,5 würfele, aber im Schnitt schon und dazu sagt man in der Mathematik **Erwartungswert**.

a) **Bestimme den Erwartungswert für dieses Experiment: Du legst ein 2€-Stück, ein 1€-Stück, ein 50cent-Stück und ein 1cent-Stück in eine Schachtel, mischst durch und lässt eine Münze zufällig herausfallen.**
   2€ sind 200 cents, 1€ sind 100 cents. Im Schnitt ziehe ich (200+100+50+1)/4 cents, was etwa 88 cents entspricht. Stell dir vor, du ziehst viermal ohne Zurücklegen. Dann hast du nacheinander (in einer beliebigen Reihenfolge…) 2€,1€,50cents bzw. 1cent gezogen. Das macht in 4 Zügen 3,51€. Ja aber dann waren es durchschnittlich doch 3,51€/4 und das sind gerade 88cents!
b) **Du hast eine Schublade mit 4 blauen und 2 roten Socken. Macht es hier Sinn, von einer erwarteten Farbe zu sprechen?!**
   Nö. Was ist denn der Durchschnitt zwischen viermal blau und zweimal rot!? Das macht nur bei Zahlen Sinn…

6. Aufgabe – Jetzt wird's kompliziert!

a) **Überlege dir die Möglichkeiten, mit beiden Würfeln gemeinsam eine 8 zu erwürfeln. Notiere dir alle Fälle.**
   3+5,4+4,5+3. Da wir zwei verschiedene Würfelfarben haben, ist 3+5 etwas anderes als 5+3. Stell dir vor, die erste Zahl ist für den blauen, die zweite für den roten Würfel. ***Wären beide gleichfarbig, gäbe es nur 3+5 und 4+4 als Lösung. Dann müssten wir aber mit der Gleichwahrscheinlichkeit etwas aufpassen. Machen wir später…***
b) **Welche Möglichkeiten für eine 2 hast du? Und eine 11?**
   1+1=2, das ist die einzige Variante! 11= 5+6 oder 6+5.
c) **Notiere dir zu jedem möglichen Ergebnis von 2 bis 12 alle möglichen Ausgänge.**

2	1+1					
3	1+2	2+1				
4	1+3	2+2	3+1			
5	1+4	2+3	3+2	4+1		
6	1+5	2+4	3+3	4+2	5+1	
7	1+6	2+5	3+4	4+3	5+2	6+1
8	2+6	3+5	4+4	5+3	6+2	
9	3+6	4+5	5+4	6+3		
10	4+6	5+5	6+4			
11	5+6	6+5				
12	6+6					

Ein liegender Baum! Das sieht lustig aus, hat aber einen Hintergrund: Denn eine 2 zu würfeln ist genauso oft möglich, wie eine 12 zu erwischen (einmal). 3 und 11, 4 und 10 usw. sind immer Pärchen. Es gibt bei den mittleren Zahlen immer mehr Möglichkeiten. Wieso? Weil stell dir vor, du möchtest eine 10, wirfst aber mit dem ersten (blauen) Wurf eine 2. Tja, Pech gehabt, das wird nix mehr. Hättest du dir eine 7 gewünscht, dann hättest du, egal, was im ersten Wurf fällt, IMMER eine Chance, noch auf 7 zu kommen!

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine 2 oder eine 12 zu werfen?
Und das ist jetzt lästiges Zusammenzählen. Es gibt insgesamt 36 mögliche Ausgänge. Für die 2 einen guten. p(2)=1/36, was etwa 3% sind. p(12)=p(2), siehe dazu den obigen Text.

e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine 2 oder eine 3 zu werfen?
Das ist p(2)+p(3). p(2)=1/36. p(3)=2/36. Insgesamt also p(2 oder 3)=3/36, was etwa 10% entspricht.

f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, zweistellig zu werfen?
Das ist ja p(10)+p(11)+p(12). Wir tricksen (geht auch anders). p(11)+p(12) ist das gleiche wie p(2 oder 3)=3/36. p(10)=3/36, also insgesamt p(10,11 oder 12)=6/36=1/6=17%. Das ist eigentlich lustig. Es ist genauso wahrscheinlich, mit einem Würfel die 6 zu erwürfeln, wie mit zwei Würfeln zweistellig zu schaffen…

g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl zu werfen?
Das ist p(2,4,6,8,10,12) oder wie ihr gemerkt habt, viel einfacher, 50% ☺

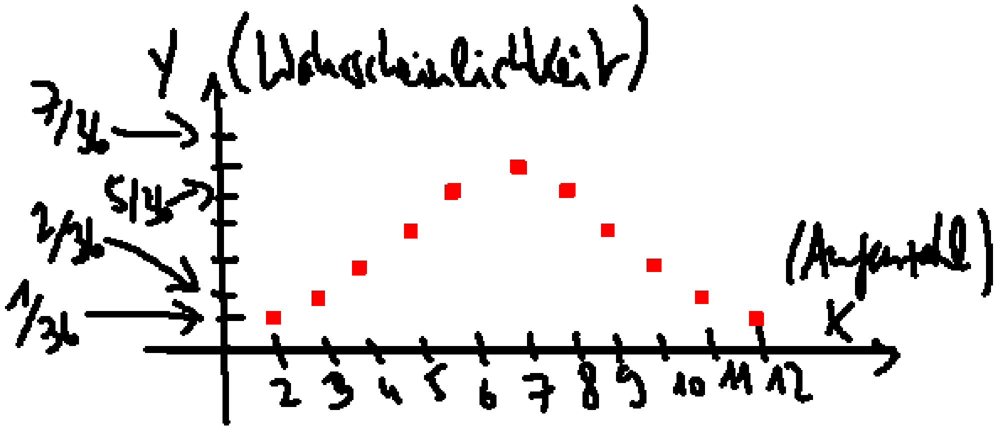
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine 2, 3 oder eine 4 zu werfen?
p(2)+p(3)+p(4) und wir zählen ab und erhalten schließlich p(2,3 oder 4)=1/6, ist ja symmetrisch zu 10,11,12 aus g)!

i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 5 oder mehr zu werfen? (Tipp: Gegenereignis!)
5 oder mehr. Das ist schwer. Aber: Wir haben gerade p(2,3,4)=1/6 bestimmt. Dann muss doch alles andere mit 5/6 Wahrscheinlichkeit kommen. Und i) ist genau das Gegenereignis zu h)! Also müssen wir nur 1-p(2,3,4)=1-1/6=5/6, was etwa 83% entspricht. Das ging schnell!

j) Zeichne ein Schaubild. x-Achse: Würfelsumme, y-Achse: Wahrscheinlichkeit. Lies anhand des Schaubilds ab, welche Zahl am häufigsten Fallen sollte.
Erst einmal eine Tabelle, welche Werte ich in mein Schaubild eintragen möchte. Dabei bin ich faul und gebe p(X) immer als 1/36-Bruch an. Denn dann mache ich mir eine 1/36-Markierung auf der y-Achse und gut ist…

Würfelsumme	Wahrscheinlichkeit
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Und dann finde ich dieses Schaubild:



Die Wahrscheinlichkeiten verteilen sich auf die Augenzahlen 2 bis 12. Dabei ist die Gesamtwahrscheinlichkeit natürlich wieder 100%, weil wir ja nur 2 bis 12 erwürfeln können. Wir addieren 1/36+2/36+3/36+4/36+5/36+6/36+5/36+4/36+3/36+2/36+1/36 und erhalten wirklich genau 36/36=1. Super! Man nennt diese Art der Verteilung übrigens eine **Binomialverteilung**. Das kommt erst in Klasse 10, aber so habt ihr es schon einmal gehört…

Zusatzaufgabe (schwer!)

a) **keine 6 zu würfeln?**
Dafür braucht man entweder viel Geduld und überlegt sich alle Fälle mit und ohne 6 (sind dann in der Summe 216 Fälle…) oder man wendet den Multiplikationssatz an. Würfele ich den ersten Würfel, habe ich in 5/6 der Fälle Glück und keine 6. Das gleiche gilt für die nächsten beiden Würfe. Die Wahrscheinlichkeit von p(3mal geworfen, keine 6) ist dann 5/6 mal 5/6 mal 5/6 = 125/216, was etwa 58% entspricht.

b) **eine 3 zu würfeln?**
Hier kann ich im ersten Wurf zu 1/6 der Fälle Glück haben und was ich danach würfele, ist auch völlig egal. Also habe ich schon einmal p(gleich eine 3)=1/6. Was ist aber p(erstmal Pech, dann 3)? Das ist 5/6 mal 1/6. Denn in 5 aus 6 Fällen tritt das Pech ein und dann kommt in nur einem von 6 Fällen die 3. p(erstmal Pech, dann 3)=5/36. Der dritte Fall; Pech-Pech-3, wäre dann so zu berechnen: p(Pech,Pech,3)=5/6 · 5/6 · 1/6 = 25/216. Insgesamt habe ich in 1/6+5/36+25/216 mal 100 Prozent der Fälle Glück. Der Bruch ist gerade 36/216+30/216+25/216 = 91/216. **Moment! Da fällt etwas auf!!! 91+125, das sind die Zahlen aus a) und b), ergeben gerade wieder 216 zusammen. Komisch? Überhaupt nicht! Denn, keine 6 zu würfeln ist doch genauso wahrscheinlich wie keine 3 zu haben, eben in 125 von 216 Fällen. Kurz: p(keine 3 erwürfeln)=125/216. Das ist aber das Gegenereignis zu p(eine 3 erwürfeln)! Und so muss p(eine 3)=1-p(keine 3) gelten und man hätte sofort 91/216 gehabt…**

c) **eine gerade Zahl dabei zu haben?**
Beim ersten Würfel werfe ich in 50% der Fälle eine gerade Zahl, das wissen wir bereits. Gleiches gilt für die anderen Würfel. KEINE gerade Zahl zu haben, ist dann aber p(ungerade,ungerade,ungerade) =1/2 · 1/2 · 1/2 = 1/8. Das Gegenereignis, also die Aufgabe c) ist dann p(mindestens einmal gerade) = 1 - 1/8 = 7/8, was 87,5% entspricht.

d) **nur 1 oder 2 zu würfeln?**
Nur 1 oder 2 bedeutet: Erster Wurf: 1 oder 2. Zweiter Wurf: 1 oder 2. Dritter Wurf: 1 oder 2. Das ist jedesmal p(1 oder 2)=2/6. Also ist p(nur 1er und 2er) = 2/6 · 2/6 · 2/6 = 8/216, was etwas 3,7% entspricht.