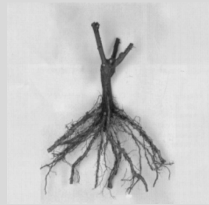
EI 8a 2010-11	MATHEMATIK # Lösung zur 3. Probearbeit	

1. Aufgabe – Diagonale im Quadrat (MIT GTR!) **(2 Punkte)**
Wie groß ist die Diagonale in einem 5cm breiten Quadrat? Wie groß ist seine Fläche?

Für ein Quadrat mit Seitelänge 1cm ist die Diagonale genau Wurzel(2) cm lang! Bei 2cm Seitenlänge sind es 2 mal Wurzel(2) cm, bei 3cm dreimal usw.

Für 5cm ist die Diagonale also 5 x Wurzel(2) cm lang; das sind ca. 7cm.

2. Aufgabe – Doppelbrüche (OHNE GTR!) **(6 Punkte)**
Vereinfache so weit wie möglich!

$a)\ \frac{\frac{3}{5}}{70}$ $b)\ \frac{5}{\frac{20}{13}}$ $c)\ \frac{5}{-\frac{70}{3}}$ $d)\ \frac{\frac{4}{15}}{\frac{10}{6}}$

a) Anstelle durch 70 zu teilen, kannst du die 3/5 auch mal 1/70 nehmen. Dann hat man insgesamt 3/350.

b) Anstelle durch 20/13 zu teilen, kannst du die 5 auch mal 13/20 nehmen. Dann gibt das 13/4, weil man 5 mit 20 zu 4 kürzen kann.

c) Anstelle durch -70/3 zu teilen, kannst du die 5 auch mal -3/70 nehmen. Dann ergibt sich -3/14, weil man 5 mit 70 zu 14 kürzen kann.

d) Anstelle durch 10/6 zu teilen, kannst du die 4/15 auch mal 6/10 nehmen. Dann erhält man 24/150. Diesen Bruch kannst du weiter kürzen; 12/75 und dann nochmal durch 3 und am Ende hat man 4/25.

3. Aufgabe – Heronverfahren (MIT GTR!) **(3 Punkte)**
Mit dem Heronverfahren lassen sich Wurzeln sehr schnell sehr genau ausrechnen. Um die Wurzel aus der Zahl 13 zu berechnen, musst du mit einer natürlichen Zahl als Start beginnen.

a) Wähle eine passende Startzahl a, für die schon „relativ genau" $a^2=13$ gilt.

Die Zahl 4 ist ganz ok; $4^2=16$.

Nun bildet man eine „bessere Näherung", indem man $a+\frac{13}{a}$ berechnet *und* durch 2 teilt.

b) Berechne diese bessere Näherung und nenne sie b!

Man bildet 4+13/4 = 7,25. Nun durch 2 teilen und man hat b=3,625.

c) Wiederhole das obige Verfahren für b und nenne das neue Ergebnis einfach c!

Nun bildet man b+13/b mit dem GTR und teilt durch 2: c=3,6056…

d) Wie oft musst du dieses Verfahren wiederholen, damit sich die ersten vier Nachkommastellen nicht mehr ändern?

Schon nach dem nächsten Schritt hat man 3,605551276. Die ersten vier Nachkommastellen (6055) ändern sich ab jetzt nicht mehr!

e) Teste, ob deine dann bestimmte Zahl die Gleichung $x^2=13$ bereits erfüllt.

Der GTR erkennt schon keinen Unterschied mehr zwischen unserer Näherung und der echten Wurzel(13); er gibt ANS^2=13 aus.

4. Aufgabe – Quadratwurzeln teilweise berechnen (OHNE GTR) (6 Punkte)
Vereinfache die Ausdrücke so weit wie möglich!

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$ b) $\sqrt{0{,}09}$ c) $\sqrt{5}+\sqrt{15}$ d) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ f) $\sqrt{0{,}04}+\sqrt{\frac{9}{4}}$

Hier muss man die Wurzeln zerlegen!

a) 24 ist 4 mal 6. Dann hat man $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}=6\cdot 2=12.$

b) 0,09 als Kommazahl wandeln wir in einen Bruch um: 9/100. Dann hat man $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}=0{,}3$

c) Hier kann man nicht viel vereinfachen, bestenfalls die 15 zerlegen.

d) Hier findet man 32 als 4 mal 8. Dann kann man die Wurzel(8) kürzen und es bleibt die Wurzel(4)=2 stehen.

e) Auch hier ist nicht viel zu tun. Man kann noch mit Wurzel(3) erweitern, dann hat man unten nur noch 3 stehen, dafür aber oben wieder eine Wurzel…

f) Wie in b) finden wir für den ersten Summand 0,2. Für den hinteren Term finden wir nach dem Zerlegen der Wurzel 3/2=1,5. Insgesamt 1,7.

5. Aufgabe – Geraden-Mischmasch (5 Punkte)
Erkläre anhand der Geraden, für die dir der Term y=-3x+7 genannt wurde, folgende Begriffe:

a) Term mit y-Achsenabschnitt und Steigung
b) Steigungsdreieck
c) Wertetabelle
d) Schaubild
e) Nullstelle

Diese Aufgabe soll eigentlich noch einmal alle Begriffe wiederholen. Ist dir einer der Begriffe unbekannt, lies im Heft bzw. auf der Homepage die Tafelbilder!

a) Der Term ist eine Darstellung von Geraden; y=-3x+7 ist der Term. 7 ist der y-Achsenabschnitt (an dieser Stelle schneidet die Gerade die y-Achse) und -3 ist die Steigung. Minus bedeutet, dass die Gerade fällt, 3 bedeutet, dass sie einigermaßen „steil" ist.

b) Das bringt uns zum Steigungsdreieck; -3 bedeutet -3/1 und das meint: gehe 1 nach rechts und -3 nach oben, also 3 NACH UNTEN. Setzt man beim y-Achsenabschnitt 7 an, dann landet man beim Punkt (1|4). Wir haben zwei Punkte und können die Gerade zeichnen!

c) Die Wertetabelle ist eine andere Darstellungsart von Geraden. Man schreibt einfach x-Werte auf und berechnet die passenden y-Werte:

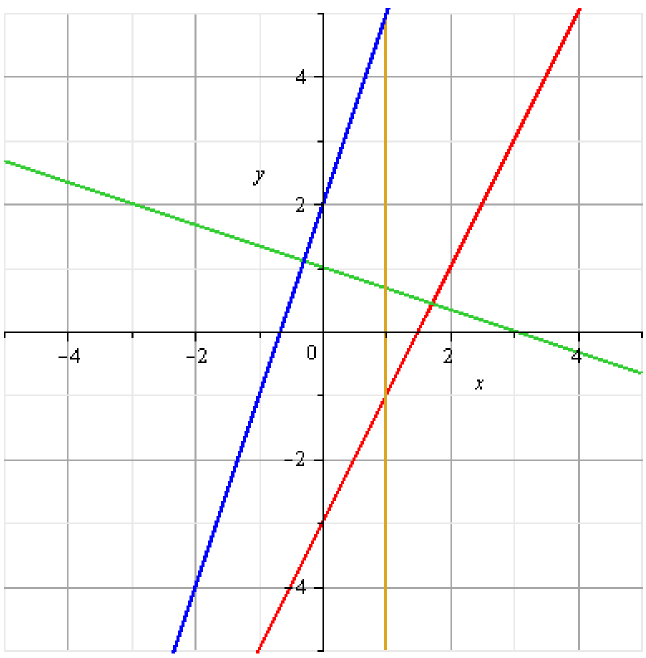
x	**0**	**1**	**1,5**	**2**
y	**7**	**4**	**2,5**	**1**

d) Das Schaubild ist die dritte Darstellungsart von Geraden. Siehe dazu Aufgabe 6!

e) Genauso wie einen Schnittpunkt mit der y-Achse gibt es einen Schnittpunkt mit der x-Achse. Dieser heißt Nullstelle. Wir können ihn im Schaubild ablesen. Alternativ können wir ihn ausrechnen, wenn wir y=0 in der Wertetabelle vorgeben. Dann suchen wir ein x, damit -3x gerade -7 ergibt (weil das sich dann mit der +7 aufhebt). das ist aber einfach 7/3 (hintere Zahl durch vordere).

6. Aufgabe – Zuordnen von Schaubildern und Termen (OHNE GTR) (6 Punkte)

a) Bestimme zu den folgenden Schaubildern von Geraden die Terme:



Grün: Der y-Achsenabschnitt ist 1. Direkt ab da sieht man ein Steigungsdreieck: 3 nach rechts, 1 nach UNTEN. Also -1/3 (minus wegen UNTEN). Insgesamt:

$$y = -1/3 \cdot x + 1$$

Blau: y-Achsenabschnitt ist 2. Direkt ab da 1 nach rechts, 3 nach oben, also Steigung 3:

$$y = 3 \cdot x + 2$$

Gelb: Sonderfall parallel zur y-Achse. Daher:

$$x=3$$

Rot: y-Achsenabschnitt -3. Ab da 1 nach rechts, 2 nach oben, also Steigung 2:

$$y = 2 \cdot x - 3$$

b) **Berechne** die Nullstellen der 4 Geraden!

Das geht mit dem notierten Kochrezept:

Grün: 1 durch 1/3 (Achtung Doppelbruch!) gibt 3. Kurz das Vorzeichen überprüfen; stimmt! x=3 ist die Nullstelle.

Blau: 2 durch 3 ist 2/3. Kurz das Vorzeichen überprüfen: Ist falschrum; also x=-2/3.

Gelb: Sonderfall! Einfach wieder x=3.

Rot: 3 durch 2 teilen gibt 3/2=1,5. Vorzeichen ist ok, also x=-1,5 ist die Nullstelle.

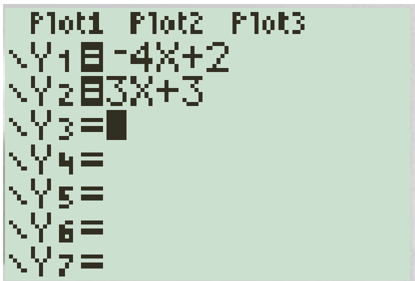
7. Aufgabe – Schnitt zweier Geraden (mit GTR) **(2 Punkte)**

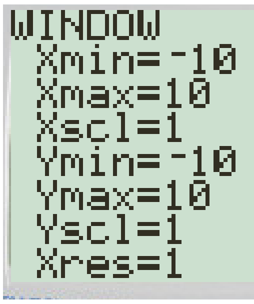
Gegeben sind zwei Geradenterme für die Geraden g und h:

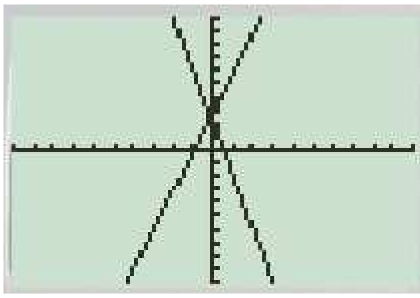
g: **$y = -4x + 2$** bzw. h: **$y = 3x + 3$.**

a) Skizziere die beiden Geraden.

Das kann man über den GTR machen oder per Hand!



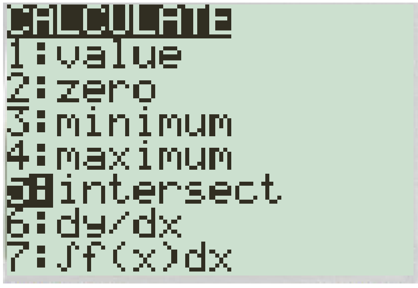




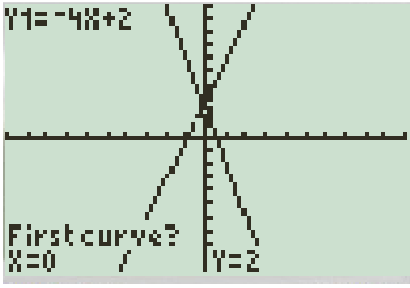
Mit diesem WINDOW ist der Schnittpunkt nicht so toll zu erkennen. Am besten ZOOMT man rein bzw. stellt das WINDOW um.

b) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h!

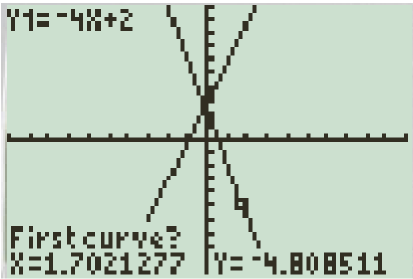
Über ein gutes WINDOW kann man den Schnittpunkt direkt ablesen, es gibt aber auch einen direkten Befehl im GTR dafür: Drücke dazu die blaue 2nd-Taste und dann TRACE. So kommt man auf das CALC-Menü:



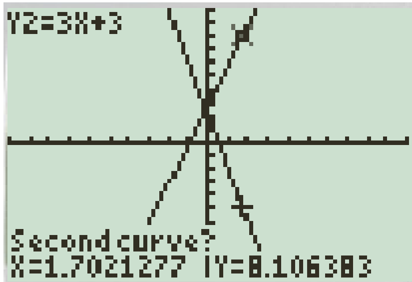
man drückt ENTER:



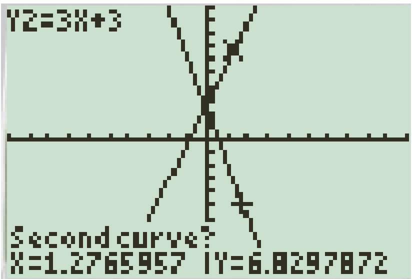
Mit den Pfeiltasten kann man auf eine Kurve laufen:



wieder ENTER:

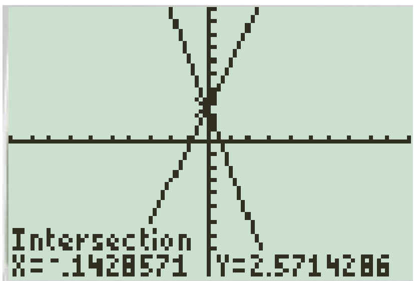


Wieder mit den Pfeiltasten auf die andere Kurve gehen:



wieder ENTER und dann soll man GUESS beantworten,

also einen Tipp abgeben, wo der Schnittpunkt ist. Man läuft einfach einigermaßen auf den Schnittpunkt und drückt ein letztes Mal ENTER:



Und man hat den x-Wert (gerundet) -0,14 plus den y-Wert (gerundet) 2,57. Der Schnittpunkt ist also etwa S(-0,14|2,57). Abweichungen von dieser Lösung gibt es, wenn du ein anderes Fenster eingestellt hast. Das ist aber nicht schlimm, die Abweichungen werden auch nicht zu groß sein.

c) *Zusatz: Berechne diesen Schnittpunkt!*

Das müsst ihr nicht können! Aber so geht's:

Du suchst ja einen Punkt, der auf BEIDEN Geraden liegt. Die Idee ist, dass für einen bestimmten x-Wert x* der y-Wert für beide Geraden derselbe sein muss. Für x*

muss also -4x*+2 genau das gleiche sein wie 3x*+3. Wir setzen daher diese beiden Ausdrücke gleich:

$$-4x^*+2 = 3x^*+3$$

und nun sammeln wir auf der rechten Seite die x-Werte und auf der linken Seite die normalen Zahlen. Dazu addieren wir auf beiden Seiten 4x*: 2 = 7x*+3 und ziehen danach auf beiden Seiten 3 ab: -1 = 7x*. Unser x* muss also mal 7 gerade -1 ergeben. Dann ist aber x*=-1/7! Das ist ca. -0,14 und genau das hat uns der Taschenrechner ja gesagt. Der y-Wert ist für beide Geraden der gleiche! Testen wir das:

$-4\cdot(-0.14)+2$ ist etwa 2,56 und $3\cdot(-0,14)+3$ ist etwa 2,58. Der GTR hat uns 2,57 gesagt!

Wenn man mit -1/7 rechnet, kommt in beiden Fällen genau der selbe Wert raus, ich habe hier grob gerundet!!!

8. Aufgabe – Eine einfache Anwendung (mit GTR) (3 Punkte)

Sprinter Frühaufsteher sprintet seinen 100m-Lauf immer durchgehend mit 30km/h, Sprinter Hasenfuß mit 36km/h. Frühaufsteher rennt sofort mit dem Startschuß los, Hasenfuß erst nach 0,5 Sekunden.

a) Wenn beide gemeinsam die 100m laufen; wer kommt zuerst ins Ziel?!

Das hier ist eine Anwendungsaufgabe zu Geraden. Eigentlich haben wir sowas schon einmal in der Physik im letzten Schuljahr gemacht, da war es nur etwas einfacher.

30km/h heißt 30.000 Meter in 60min. Nun soll Frühaufsteher 100m rennen, also teilen wir die 60min durch 300. Dann hat man 1/5min, was 12 Sekunden entspricht.

36km/h heißt 36.000 Meter in 60min. Um auf die Zeit für 100m zu kommen, teilen wir die 60min durch 360 und bekommen 1/6min, was genau 10s entspricht.

Hasenfuß bekommt noch 0,5 Sekunden draufgeschlagen, weil er die ja später aufsteht. Also braucht Frühaufsteher 12s und Hasenfuß 10,5s. Hasenfuß ist erster!

9. Aufgabe – Eine schwere Anwendung (mit GTR) (4 Punkte)

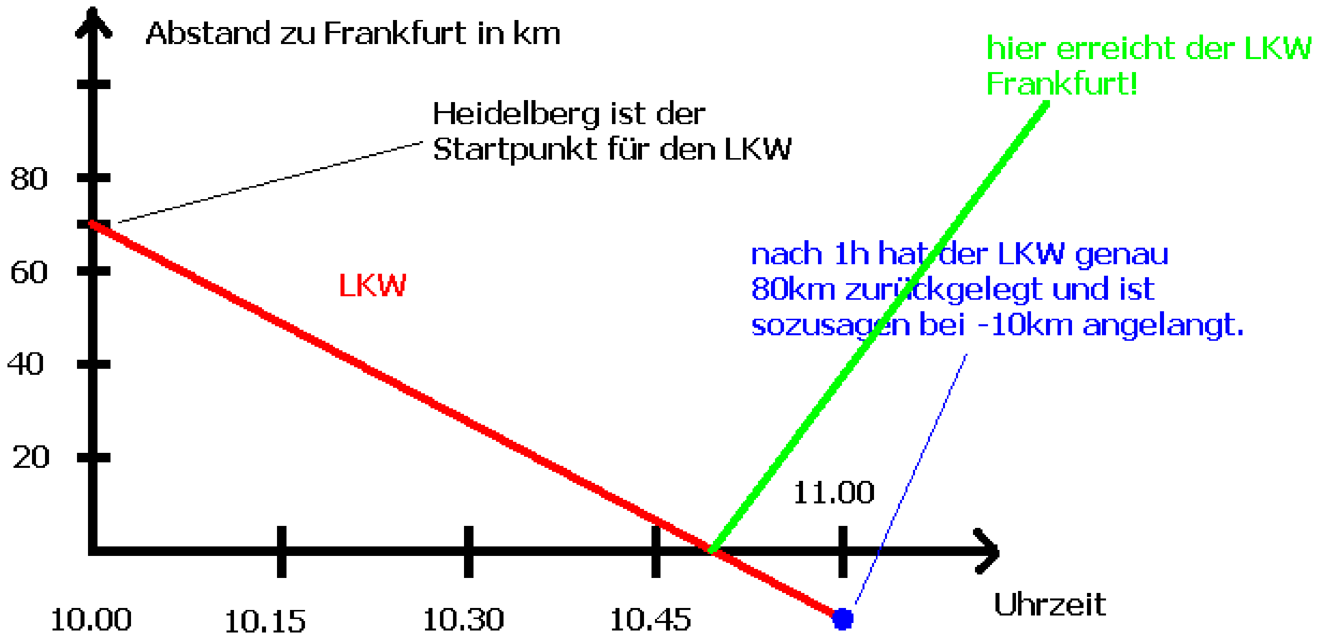
Frankfurt und Heidelberg liegen ca. 70km voneinander entfernt. Die Autobahn A5 verbindet sie direkt. Um 10h morgens startet ein LKW-Fahrer in Heidelberg mit einer Geschwindigkeit von 80km/h und fährt Richtung Frankfurt. Um 10.30h startet ein Porschefahrer von Frankfurt Richtung Heidelberg und brettert mit 200km/h über die Autobahn.

Das ist die Einseraufgabe!

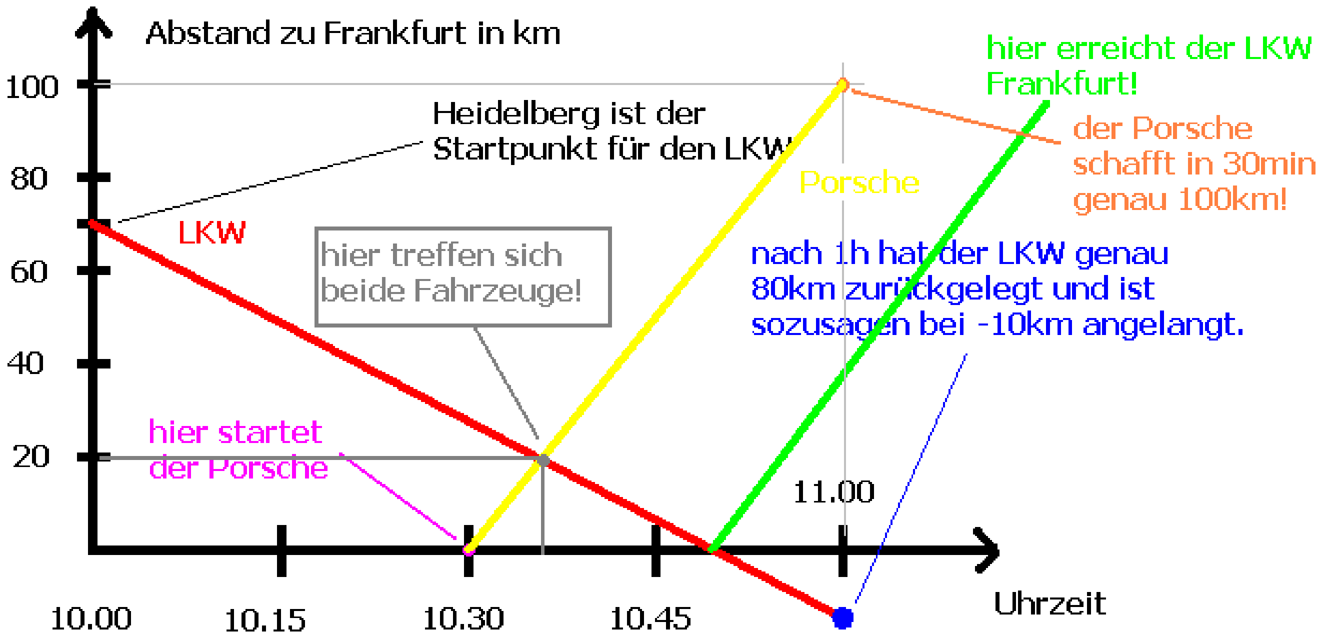
a) Fertige eine passende Skizze an: Auf der x-Achse ist die Zeit in 15min-Schritten einzutragen, auf der y-Achse der Abstand zu Frankfurt in Kilometern.

Hier muss man ganz schön aufpassen, damit man nicht durcheinander kommt. Auf der x-Achse beginnen wir um 10h, dann kommt 10h15, 10h30, 10h45 usw. Wie lang man die x-Achse zeichnen soll, ist nicht so klar, aber wenn du schaust; der LKW schafft 80km in einer Stunde, muss aber nur 70km zurücklegen. Ich würde also bis 11h malen und hoffen, dass das hinkommt!

Zuerst einmal nur der LKW:



Nun muss noch der Porsche in die Zeichnung. Der startet in Frankfurt (also auf der x-Achse, weil da ist der Abstand zu Frankfurt genau 0km):



b) Nach wievielen Kilometern von Heidelberg aus gerechnet begegnen sich die beiden Fahrzeuge?

Die Zeichnung oben ist so ausführlich, dass man den Schnittpunkt ablesen kann. Es sind ca. 20km vor Frankfurt, also ca. 50km ab Heidelberg.

Man sieht auch, dass der LKW in Frankfurt ist, bevor der Porsche in Heidelberg ankommt.

Man kann dieses Problem auch rechnerisch lösen. Dazu müsste man zwei Geradengleichungen aufstellen. Wir lernen das nach und nach!