EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* # Stunde vom 28.01.2010	$\mathbf{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots}$

In dieser Stunde haben wir ein offenes Ende produziert… Da ich ja noch ein Referendar bin, passiert das auch mal! Wir wollten in dieser Stunde, in der mehrere von Euch gefehlt haben, versuchen, eine Funktion f zu finden, deren Ableitungsfunktion f ' wieder genauso aussieht wie f, kurz: **f ' = f**.

ANSATZ

Eine Idee von euch war die Nullfunktion f(x) = 0. Das ist sicher eine Lösung unseres Problems, denn f '(x) = 0 stimmt. Allerdings ist das eine ziemlich langweilige Lösung. Die Frage ist, gibt es noch weitere Lösungen unseres Problems?!
Als ersten Ansatz kann man ja mal „etwas mehr" Funktion hinschreiben, also bspw. f1(x) = 1. Dann haben wir aber ein Problem, denn die Ableitungsfunktion ist wieder die Nullfunktion. Als einfache Abhilfe könnte man aber einfach x dazunehmen, also f2(x) = 1+x. Was bringt das? Nun ja, diese Funktion abgeleitet ergibt 1. Damit haben wir ja unser Problem für f1 gelöst! Sind wir schon fertig? Natürlich nicht! Weil f2 hat noch ein x im Term und das ist jetzt weggefallen. Trotzdem haben wir bereits eine Idee, wie es weitergehen kann!!! Wir nehmen einfach $x^2/2$ dazu, weil das abgeleitet liefert das x in f2! Also f3(x) = $1+x+x^2/2$. Schon wieder Problem gelöst, schon wieder neues Problem, weil x^2 wegfällt… Wieder können wir einen Term dazu bauen, der abgeleitet $x^2/2$ ergibt. Und wieder hätten wir ein neues Problem usw.

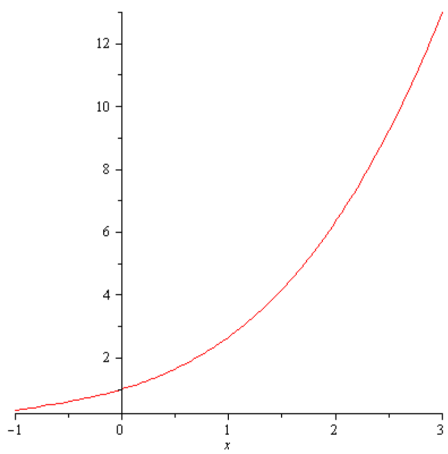
LÖSUNG

Offensichtlich werden wir so zwar nie fertig, können aber in jedem Schritt unser Problem des vorangegangenen Schrittes lösen. Mathematiker sind damit zufrieden! Was erhalten wir so?

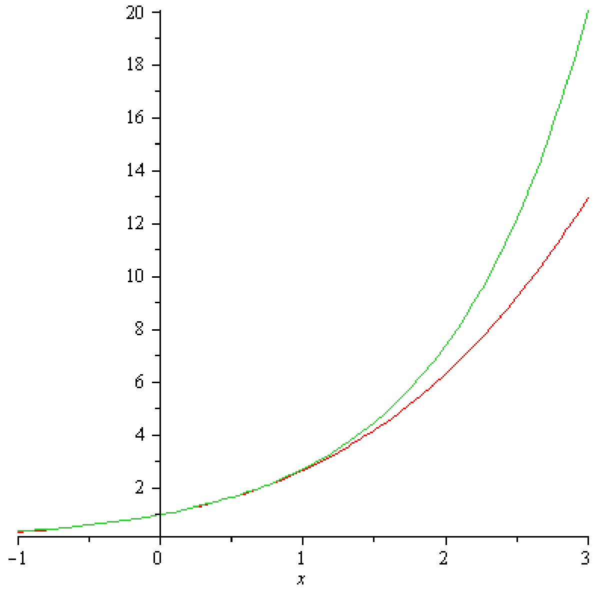
$$\text{f-fast}(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots$$

Die Punkte meinen, dass wir immer weiter Terme anfügen müssen, um unsere Probleme zu lösen. Das tolle ist, wir erkennen die Struktur der einzelnen Summanden. Denn der 70. Term hätte in Worten die Form „x hoch 70 durch (70 mal 69 mal 68 mal … mal 3 mal 2 mal 1)"!

Zeichnen wir einmal die Funktion f-fast, dann ergibt sich dieses Schaubild:



Irgendwie erinnert dieses Schaubild an Wachstumsaufgaben aus der 9. Klasse, oder? Schauen wir mal…



In dem Bild oben ist rot unsere „Näherungslösung" unseres Problems eingezeichnet, grün eine neue Funktion, die sogenannte Exponentialfunktion. Sie entsteht dadurch, dass man jedem x die Zahl e^x zuordnet. Dabei steht e für die Euler'sche Zahl, die etwa 2,7 ist und ähnlich wie π etwas „geheimnisvoll" ist. Als Beispiel: 1 wird 2,7 zugeordnet, 2 wird $2{,}7^2=7{,}29$ zugeordnet usw.

Diese neue Funktion wird euch viel in der Kursstufe beschäftigen. In der Schule erfahrt ihr eigentlich nicht, dass man diese Zuordnung auch einfacher schreiben kann. Nämlich dadurch, dass man unseren Lösungsansatz komplett hinschreibt. Das ist dann schon Unistoff, obwohl es gar nicht so schwer ist.