EI 10c M 2009-10	*Mathematik* Lösungen zur Probearbeit zur 4. Arbeit	Teil 1

Die Aufgaben der Probearbeit habt ihr bereits im Unterricht zum Teil bearbeitet und mit mir besprochen. Bitte melde dich noch vor der Arbeit, wenn du etwas nicht verstehst, denn in der Arbeit kann ich dir ja nicht mehr helfen…

Lösung zur 1. Aufgabe

a) $f(x) = -x_4 + x^2$ soll auf Nullstellen untersucht werden, also ist die Gleichung $0 = -x_4 + x^2$ nach x aufzulösen. Zuerst schaue ich mir den Grad der Gleichung an. 4. Also nix mit abc-Formel. Ich könnte jetzt versuchen, aufzulösen. Dann steht da $x_4 = x^2$. Welche Zahlen erfüllen so eine Gleichung? Null ist eine Lösung. 1 auch. Und -1. Falls du hier nicht drauf kommst, ist das kein Beinbruch, denn es geht auch anders. Gehen wir zurück zum Grad 4. Die abc-Formel geht nicht, aber Ausklammern: $0 = x^2(-x^2+1)$. Und nun kann ich x1=0 ablesen. Die Klammer wird Null für x2=1 und x3=-1. Wieso: $(-x^2+1) = 0$ meint ja $-x^2+1=0$ meint $1 = x^2$. Und nach Wurzeln stehen x2 und x3 da! Die Nullstellen der Klammer lassen sich im Übrigen auch noch mit der abc-Formel bestimmen für a=-1, b=0 und c=1. Und: man hätte schon ganz am Anfang mit Substitution rechnen können: $u=x^2$. Viele Wege führen nach Rom.

b) Bilde $f'=4x^3+2x$. Dann setze gleich Null: $-4x^3+2x = 0$. Wieder nix mit abc-Formel, aber wieder geht es mit Ausklammern voran: $x(-4x^2+2)=0$. Damit sind die Nullstellen der Ableitung x1=0 und die Nullstellen der Klammer $(-4x^2+2)$. Hier geht schon Auflösen oder abc-Formel, so oder so, es kommt (gerundet) x4=0.7 und x5=-0.7 raus.

c) Die Kandidaten haben wir schon in b) bestimmt. Nun müssen wir noch schauen, ob es wirklich lokale Extrema sind und wenn ja, welcher Art (Maximum oder Minimum). Ich verwende den Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung **(Tipp: das andere Kriterium funktioniert nicht immer und daher ist der Vorzeichenwechsel-Test besser!)**.
1) Test für x1=0: Gewackel… $f'(-0.1)= -4(-0.1)^3+2(-0.1)=+0{,}004 - 0{,}2 < 0$ und $f'(0.1) > 0$. Es geht hier nur ums Vorzeichen! Minus nach Plus heißt Tiefpunkt!
2) Test für x4=0.7: Gewackel… $f'(0.6) > 0$ und $f'(0.8) < 0$ (Einfach für x Werte einsetzen und im GTR nachrechnen!). Hier liegt ein Hochpunkt vor.
3) Test für x5=–0,7: Genauso wie vorher, hier ergibt sich auch ein Hochpunkt.

d) Symmetrien testen ist ganz einfach: Wir nehmen erst einmal irgendeinen x-Wert und seinen „Spiegelfreund“, also bspw. $x^*=2$ und $x'=-2$. $f(x^*)=f(2)=-16+4=-12$ und $f(x')=-12$. Deutet auf eine y-Achsensymmetrie hin. Allgemein setzt man $-x$ in f(x) ein und erhält diese Gleichung: $f(-x)=(-x)_4+(-x)^2=-x_4+x^2$, denn die geraden Hochzahlen 4 und 2 „fressen“ die negativen Vorzeichen! Es liegt eine Achsensymmetrie vor!

Lösung zur Aufgabe 2

Hier einfach die jeweilige Funktion in den GTR eingeben und den Graph „tracen“, die Wertetabelle „auslesen“ oder mit <CALC> direkt <Min> oder <Max> ausgeben lassen… Die Lösungen:

a) Mittels <CALC> und <Min> ergibt sich (nach eventuellem Einrichten des <WINDOW>s) für das einzige lokale Minimum etwa x=0,7. Hier ist es sogar ein globales Minimum; nirgends sonst gibt es kleinere Funktionswerte! Mehr zu finden gibt es nicht, eine Parabel hat ja nur eine Extremstelle.

b) Hier ergibt sich x=0.77 für ein lokales Minimum (auch wieder global!). Sonst gibt es hier nichts zu finden. Ich musste etwas am <WINDOW> basteln, letztlich habe ich für x den Bereich von -5 bis 5 gewählt und für y den Bereich von -50 bis 50, allerdings in 10er-Schritten. Hier nur Mut, am Anfang einen großen Bereich zu wählen und dann reinzuzoomen. So übersieht man dann nichts.

c) Hier herrscht „tote Hose“. Keine lokalen Extremstellen, es gibt nur einen Sattelpunkt bei P(0|0). Passt immer auf, Stellen von Punkten zu unterscheiden!

Lösung zur Aufgabe 3

Leitet man $f(x) = 5x^3$ fünfmal ab, so ergibt sich nacheinander $15x^2$, dann 30x, 30, 0 und schließlich noch einmal 0. Das erscheint komisch, ist aber nicht schlimm, denn leitet man eine Konstante ab, erhält man eben 0.