EI 10c M

2009-2010

MATHEMATIK

4. Klassenarbeit Lösung

Hier ein Lösungsvorschlag zur 4. Klassenarbeit.

AUFGABE 1 **6 PUNKTE**

Untersuche die über den Funktionsterm

$$f(x) = x^5 - x^3.$$

definierte Funktion f **per Hand** auf

a) Nullstellen.

Um die Nullstellen zu finden, muss man f(x)=0 setzen. Das schreibt man erst einmal hin:

$$f(x) = x^5 - x^3 = 0$$

Um diesen Term aufzulösen gibt es sehr viele Möglichkeiten. Ich gehe immer so vor: 1) x ausklammern, wenn möglich. 2) einfach auflösen, wenn möglich. 3) schlaues Raten, wenn möglich. 4) abc-Formel, wenn möglich. 5) was ihr hier noch nicht können musstet: Substituieren, wenn möglich. In der Schulmathe kommt ihr damit immer zum Erfolg.

Hier kann man sogar x^3 ausklammern und erhält $0 = x^3(x^2-1)$. Schlaues Raten hilft hier sofort, denn ist x^3 Null, haben wir bereits eine Nullstelle. Also x1=0. Und ist (x^2-1) gleich Null, eine weitere: $x^2-1=0$ heisst aber $x^2=1$ und nach Wurzeln ergibt sich x2=-1 und x3=1.

Als Nullstellen findet man x1=0, x2=-1 und x3=1.

b) Nullstellen der Ableitungsfunktion.

Gleiches Spiel, nur mit einer anderen Funktion. Wir leiten ab, um diese Funktion zu bekommen:

$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2$$

Wieder lässt sich ein x ausklammern, sogar doppelt. Und man erhält die Gleichung $x^2(5x^2-3)=0$. Für x1=0 gibt's hier wieder eine Nullstelle, die anderen (zwei) sind in der Klammer $(5x^2-3)$ „versteckt". Wir finden sie durch Umformung: $5x^2-3=0$ heißt aber $5x^2=3$. Heißt aber, dass $x^2=3/5$ sein muss, was 0,6 entspricht. Also ist x gleich plusminus Wurzel aus 0,6. Ungefähr ist das: x2=-0,77 und x3=0,77.

c) Extremstellen. Gib die zugehörigen Extrempunkte an.

Für Extremstellen kommen alle Nullstellen der Ableitungsfunktion in Frage. Wir haben also die drei Kandidaten x1=0, x2=-0,77 und x3=0,77. Ich benutze das VZW-Kriterium und wackele um die Werte herum:
x1=0: f '(-0.1) < 0, f '(0.1) < 0. Von – nach –, also keine Extremstelle (ein Sattelpunkt).
x2=-0.77: f '(-0.78) > 0, f '(-0.76) < 0. Von + nach –, also ein Hochpunkt.

x=0.77: f ‘(0.76) < 0, f ‘(0.78) > 0. Von – nach +, also ein Tiefpunkt.

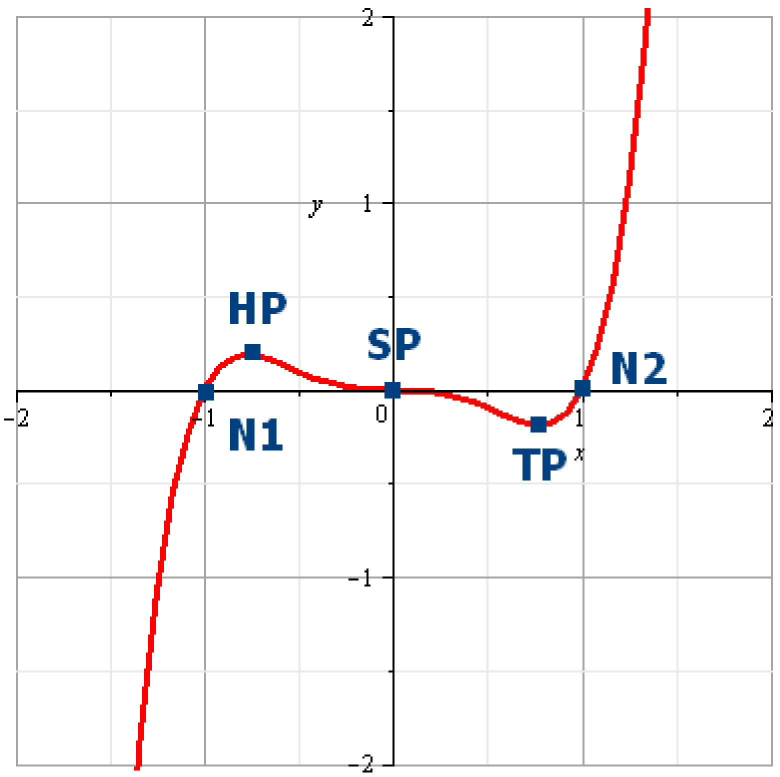
Die Extrempunkte sind damit T(0.77|-0.19) und H(-0.77|0.19).

d) Ist die Funktion symmetrisch?
Zur Erinnerung: Punktsymmetrie bei f(-x)=-f(x) bzw. y-Achsensymmetrie bei f(-x)=f(x).

Diese Teilaufgabe ist aus der Wertung herausgenommen, gibt allerdings einen halben Zusatzpunkt. Sie sollte eigentlich bei Aufgabe 3 helfen. Die Funktion ist punktsymmetrisch, da bspw. f(-2)=-f(2) gilt. Eigentlich muss man das allgemein beweisen und –x in den Funktionsterm einsetzen…

Skizziere die Funktion *f* für x-Werte von -2 bis 2. Trage dabei die wichtigsten Punkte ein!

Achtung! Die Funktion f selbst, nicht ihre Ableitung, ist zu skizzieren. Die wichtigen Punkte sind die beiden Nullpunkte und die beiden Extrempunkte. Auch den Sattelpunkt S(0|0) kann man noch einzeichnen:



AUFGABE 2 **6 PUNKTE**

In dieser Aufgabe sollst du **mit dem GTR** arbeiten! Achte auf eine ausreichende Dokumentation!

a) Bestimme die Nullstellen für die über den Funktionterm $f(x)=\sqrt{x^2+1}-4$ gegebene Funktion *f*. Bestimme zusätzlich *f* ‘(1) und *f* “(1).

Eingabe von f in Y1. Mit <CALC> und <ZERO> findet man die Nullstellen, das <WINDOW> bleibt sehr übersichtlich eingestellt (Werte zwischen -5 und 5 beispielsweise). Setzt man nun Y2=nDeriv(Y1,X,X), so kann man im <TABLE> bei 1 den Wert von Y2 auslesen, was dann gerade f ‘(1) entspricht. Den <TABLE> verstellt man übrigens mit <TBLSET>. Für den Wert f “(1) gibt man in Y3 den Ausdruck nDeriv(Y2,X,X) ein und schaut wieder im <TABLE> nach. Man findet so die gerundeten Ergebnisse f ‘(1)=0.7 und f “(1)=0.35. *Noch ein Tipp: Um die Übersichtlichkeit im*

<GRAPH> oder im <TABLE> zu behalten, kann man einzelne Y-Funktionen ausschalten. Man geht einfach auf das Istgleichzeichen in Y1=… und drückt <ENTER>. War es vorher schwarz hinterlegt, ist es das jetzt nicht mehr und Y1 wird nicht mehr angezeigt. Erneutes drücken auf das Istgleichzeichen reaktiviert Y1 wieder.

b) Die Funktion g sei über diesen Funktionsterm gegeben:

$$g(x) = 0.25x + \sqrt{(1000 - x)^2 + 1000}\,.$$

Bestimme $g(0)$ und $g(1000)$. Bestimme das lokale Minimum, gerundet auf ganze Zehner.

Auch hier gibt man erst einmal die Funktion g für Y1 ein. Dann kann man im <TABLE> die Werte von Y1 für X=0 und X=1000 auslesen. Hier muss man mit <TBLSET> arbeiten. Es ergibt sich grob gerundet g(0)=1000 und g(1000)=280. Über <CALC> und <MIN> findet man das Minimum ungefähr bei X=990. Allerdings muss man hier das <WINDOW> erst geeignet einstellen, wozu man systematisch probiert: immer größere y-Werte, bis man überhaupt was sieht, dann besser einstellen. Dann immer größere x-Werte und in Richtung fallender y-Werte genauer nachschauen.

AUFGABE 3 **6 PUNKTE**

In welchem Punkt schneidet die Tangente für x=2 und für die Funktion f aus der Aufgabe 1 die x-Achse? Gibt es eine weitere Tangente für die Funktion f mit derselben Steigung? Wenn ja, stelle auch diese Tangentengleichung auf.

Zuerst einmal geht es hier um den Funktionsterm aus Aufgabe 1:

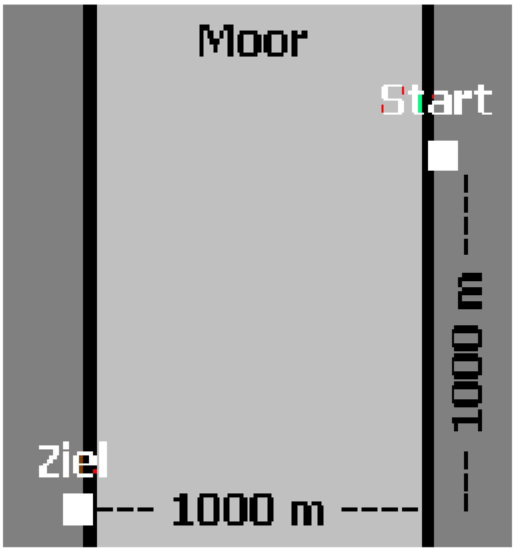
$$f(x) = x^5 - x^3$$

Wir brauchen den Punkt P(2|?), wobei ? gerade f(2) ist. f(2)=32-8=24. Also gilt P(2|24). Nun benötigen wir noch die Steigung unserer Tangenten, die ja gerade f ‘(2) ist. Wir haben die Funktion f ja bereits in Aufgabe 1 abgeleitet und setzen dort den Wert 2 ein. Es ergibt sich dann f ‘(2) = 5·16 – 3·4 = 80 – 12 = 68. Also ist m=68 in der Tangentengleichung y=mx+c. Um c zu bestimmen, setzen wir P in die unfertige Gleichung ein: 24=68·2+c und erhalten c=-112. Die Tangente ist also über y=68x-112 bestimmt. Die sollen wir nun mit der x-Achse schneiden. Also setzen wir die Tangentengleichung gleich Null: 0=68x-112 und lösen nach x auf. Wir erhalten gerundet x=1,6.

Der zweite Teil ist schwer und die Aufgabe 1d sollte euch dabei helfen. Gibt es noch eine weitere Tangente an der Funktion f mit derselben Steigung? Man kann das Folgende auch an der Skizze sehen bzw. sich im GTR klar machen. Da die Funktion punktsymmetrisch ist, wird die Ableitung y-Achsensymmetrisch sein. Nun ist aber der Wert dieser Ableitung bei x=2 genau 68. Bei x=-2 wird er dann auch genau 68 sein! Damit muss Q(-2|-24) ein Punkt sein, der unsere Bedingung erfüllt. Nun muss man in y=68x+c das c erneut (und diesmal mit Q) bestimmen und bekommt die Gleichung −24= −136+c und so c=112. Insgesamt ist die zweite Tangentengleichung dann y=68x+112.

AUFGABE 4 **6 PUNKTE**

Du machst mit einer Freundin Urlaub in der finnischen Stadt Sonkajärvi. Während eures Aufenthalts findet die Weltmeisterschaft im Frauentragen statt. Ihr überlegt euch, daran teilzunehmen, wollt euch aber nicht blamieren. Der Parcour sieht wie folgt aus:



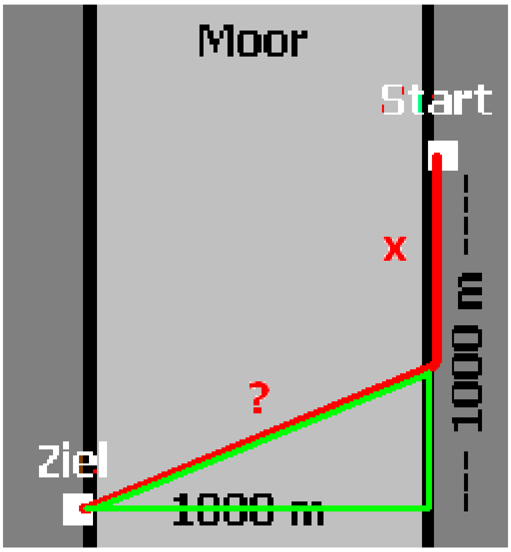
Gestartet wird bei der Markierung oben rechts, Ziel ist die Markierung unten links. Das Moor ist 1000 Meter breit. Die Strecke vom Startpunkt senkrecht nach unten bis auf Höhe des Ziels beträgt ebenfalls 1000 Meter. Wie man läuft, ist nicht vorgegeben, allerdings rennen alle Teilnehmer immer direkt aufs Ziel zu. Die Siegerzeit der letzten Jahre betrug jeweils um die 1235 Sekunden. Ihr macht vorher einen Probelauf und stellt fest, dass ihr für den direkten Weg vom Start zum Ziel etwa 1400 Sekunden benötigt. Bleibt ihr erst einmal auf eurer Seite und lauft die 1000m bis auf Höhe des Zielpunktes auf festem Boden und überquert dann in gerader Linie das Moor, so benötigt ihr 1250 Sekunden. Als gut ausgebildete Mathematiker erkennt ihr, dass ihr diese Weltmeisterschaft gewinnen werdet und meldet euch an.

a) Wie groß ist eure Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde im Moor?
Wir brauchen für die direkte Strecke 1400 Sekunden. Wie lang ist aber diese Strecke? Der Tipp aus Teilaufgabe c) hilft auch hier; $1000^2+1000^2=\text{Strecke}^2$ (alles in Metern) und so findet man $2.000.000 = c^2$ oder c etwa 1400 Meter. Wir schaffen also genau einen Meter in einer Sekunde!

b) Wie groß ist eure Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde auf festen Untergrund?
Wir laufen zwei Teilabschnitte (einmal fester Untergrund, einmal Moor). Vom Moorabschnitt wissen wir bereits, dass wir 1000 Sekunden brauchen werden. Im Text steht, es hat insgesamt 1400s gedauert. Also müssen wir die 1000m auf festem Untergrund in 250s geschafft haben, was bedeutet, dass wir hier 4m in einer Sekunde zurücklegen können.

c) Bestimme den optimalen Laufweg vom Start zum Ziel. Gehe dabei davon aus, dass die Laufgeschwindigkeit im Moor 1 m/s beträgt und außerhalb 4 m/s.
Tipp: Du kannst den Satz des Pythagoras verwenden!

Wir können hier die Ergebnisse aus Teil a) und b) überprüfen. Die Frage ist nun, wie wir besonders schnell ins Ziel kommen. Es sind ja zwei gegenläufige Faktoren zu beachten: der direkte Weg ist viel kürzer als ein Weg, bei dem man erst einmal am Ufer entlang rennt. Andererseits ist man auf dem Festland viel schneller unterwegs. Wahrscheinlich liegt also die optimale Route „in between"… Machen wir uns eine Skizze:



Wir laufen hier eine gewisse Strecke x auf festem Untergrund, um dann eine unbekannte Reststrecke ? im Moor zurückzulegen. Doch ist ? wirklich nicht bekannt?! Eigentlich schon! Denn ? entspricht im grünen Dreieck ja gerade dem c, wenn man $a^2+b^2=c^2$ im Hinterkopf hat. Und die untere Seite ist gerade 1000, die rechte Seite (1000-x), denn es fehlen von insgesamt 1000 Metern ja gerade die x Meter, die wir erst einmal auf festem Grund gespurtet sind. Also gilt:

$$? = \sqrt{1000^2 + (1000 - x)^2}$$

Und jetzt müssen wir uns überlegen, wie man aus den beiden Teilstrecken ? und x eine Zeit bekommt. Diese Laufzeit müssen wir dann minimieren. Für die Meter im Moor benötigen wir ja je genau eine Sekunde. Also entsprechen ? Metern auch ? Sekunden… Außerhalb dürfen wir unsere gelaufene Strecke x durch 4 teilen, da wir ja für einen Meter nur eine Viertelsekunde benötigen (oder anders gesagt, wir 4 Meter in einer Sekunde schaffen). Also ist die Laufzeit T diese:

$$T = \frac{x}{4} + ? = \frac{x}{4} + \sqrt{1000^2 + (1000 - x)^2}$$

Diese Laufzeit hängt nun nur noch von x ab, also T(x). Gibt man das nun in Y1 im GTR ein und geht über <CALC> und <MIN> auf das Minimum, so ist x etwa 750 Meter. Das heißt, man läuft erst einmal 750 Meter auf festem Untergrund nach unten, um dann den Rest im Moor zu laufen. Die Siegerzeit ist der y-Wert oder anders gesagt T(750) und auch den hat der GTR schon angezeigt:

d) Wie lautet eure voraussichtliche Siegerzeit?

Etwa 1220 Sekunden!