Monotonie

Monotonie ist ein besonderes Verhalten, dass manche Funktion besitzt. Der Begriff ist nur ein Oberbegriff; es gibt **streng monoton wachsendes** Verhalten, aber auch nur **monoton wachsendes** Verhalten. Genauso gibt es **streng monoton fallende** Funktionen bzw. **monoton fallende** Funktionen.

Für strenge Monotonie gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{monton wachsend:} & a, b \in \mathbb{D}_f : a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \\ \text{monton fallend:} & a, b \in \mathbb{D}_f : a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \end{array}$$

Bei nicht strenger Montonie kommt bei den Ungleichungen einfach ein „=“ dazu:

$$\begin{array}{ll} \text{monton wachsend:} & a, b \in \mathbb{D}_f : a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \\ \text{monton fallend:} & a, b \in \mathbb{D}_f : a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \end{array}$$

Das ist abstrakt und man sollte es sich an Beispielen klar machen! Solche findet Ihr auf dem Arbeitsblatt. Ein schon besprochener Spezialfall sind die konstanten Funktionenen, wie bsp. $f(x) = 5$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese sind nicht streng monoton, aber einfach aus den Definitionen heraus sowohl monoton wachsend wie fallend.

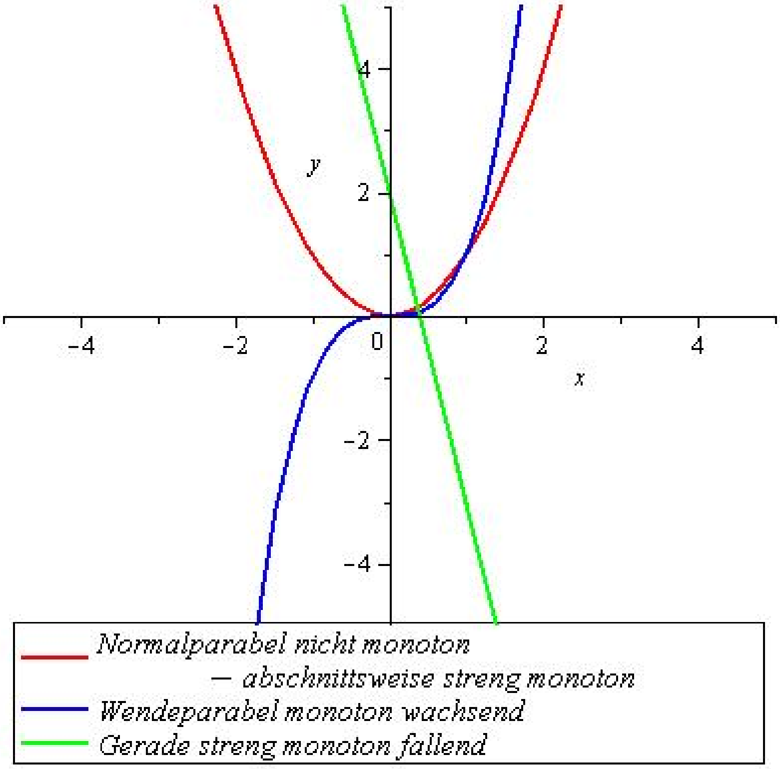
Wie wir uns überlegt haben, kann man bei (differenzierbaren) Funktionen die erste Ableitung $f'(x)$ zur Hilfe nehmen, um schnell auf Monotonie zu testen. Dann gilt folgendes:

$$\begin{array}{ll} \text{monton wachsend:} & x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow f'(x) > 0 \\ \text{monton fallend:} & x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow f'(x) < 0 \end{array}$$

Bei nicht strenger Montonie kommt bei den Ungleichungen einfach ein „=“ dazu:

$$\begin{array}{ll} \text{monton wachsend:} & x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow f'(x) \geq 0 \\ \text{monton fallend:} & x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow f'(x) \leq 0 \end{array}$$

Nicht-monotone Funktionen sind oft abschnittsweise monoton. Im folgenden Bild ist die Normalparabel erst einmal nicht monoton, da in 0 die Ableitung ihr Vorzeichen wechselt. Lässt man für den Defintionsbereich nur die positiven reellen Zahlen zu, so ist sie monoton steigend. Streng monotones Steigen gibt es erst, wenn man mindestens noch den Nullpunkt ausnimmt, denn dort ist die Ableitung ja 0. Aus demselben Grund ist die Wendeparabel nur monoton steigend, ein Punkt reicht aus, die globale Eigenschaft „streng monoton wachsend“ zu verletzen!



Das Gesagte lässt sich nun auf Folgen übertragen, denn diese sind ja nur spezielle Funktionen. Die Definitionen der Monotonie bleiben die gleichen, nur dass $\mathbb{D}_{Folge} = \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{monton wachsend:}\;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2}$$

und analog für die anderen Fälle.

Auch bei Folgen lässt sich die Monotonie mittels unserer „Steigung“ (siehe dazu *folgen.pdf*)$a_{n+1} - a_n$ testen. Es gilt dann ganz analog zu oben:

$$\text{monton wachsend:}\;\; n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$$

und analog für die anderen Fälle, was man als kleine Übung am besten gleich selbst aufschreibt.