Folgen

Die vollständige Induktion ist in der Mathematik ein gängiges, da einfaches Beweisverfahren.
Studiert Ihr nicht gerade Mathematik, Physik oder Informatik, werdet Ihr die Induktion außer im Abi (und für Mathescheine im Studium der Biologie, Chemie, etc.) nie wieder benötigen.

Zu Beweisen in der Mathematik (könnt Ihr überspringen): In der Mathematik gibt es anders als in allen anderen Wissenschaften echte Wahrheiten. Ein einmal bewiesener Satz gilt unter denselben Voraussetzungen für alle Zeiten. Daher wird in der Mathematik eben auch alles bewiesen.
Prinzipiell sind zwei Beweisarten möglich; entweder man beweist konstruktiv oder indirekt. Konstruktiv beweisen heißt, man entwickelt aus Bekanntem in logisch richtigen Schritten etwas Neues. Indirekte Beweise wie die vollständige Induktion setzen bereits eine Aussage als gegeben voraus und überprüfen nur noch deren Richtigkeit. Woher die Aussage kommt, bleibt unklar, ist für diese Art Beweis aber auch egal. Ein Beispiel war die Irrationalität der $\sqrt{2}$*. Annahme war, sie sei doch rational und ein indirekter Beweis zeigte dann, dass das falsch sein muss. Was diese Zahl sonst ist und ob es sie überhaupt gibt, weiß man dann noch lange nicht. Daher sind die meisten Mathematiker von direkten Beweisen mehr angetan.*

Zur vollständigen Induktion:
Da es bei den natürlichen Zahlen ein kleinstes Element gibt *(bei den ganzen Zahlen schon nicht mehr!)*, kann man wie Leon beschrieben hat, eine Art Domino-Effekt nutzen:

Man zeigt, dass eine gegebene Aussage $A(n)$ für ein bestimmtes n_0 (meistens gilt $n_0 = 1$) erfüllt ist. Zusätzlich zeigt man, dass die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ direkt aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt. Dann muss die Aussage sofort für alle natürlichen Zahlen ab dem gewählten n_0 gelten. Denn gilt es für diese Zahl, dann auch für den Nachfolger $n_0 + 1$ und für dessen Nachfolger usw. Machen wir uns das an einem einfachen Beispiel klar:

Behauptung: alle Zahlen der Form $2 \cdot n$ mit natürlichem n sind gerade *(Wir stellen uns dumm und wissen im Moment nur, dass* 2 *gerade ist und das die Summe zweier gerader Zahlen wieder gerade ist).*
Zuerst einmal überzeugen wir uns für den Fall $n = 1$: In diesem Fall heißt die Aussage $A(1)$: „Die Zahl 2 ist gerade“. Das stimmt! Nun erhalten wir ja den Nachfolger vom n. Fall, indem wir ganz einfach 2 addieren. Und da die 2 wie wir gerade festgestellt haben, gerade ist, addieren wir zu etwas Geradem jedesmal wieder etwas Gerades. Und so bleibt die neue Zahl auch gerade. Fertig.

Das war nun nicht wirklich formal, zeigt aber die Idee ganz gut.

Formalisiert man dieses Verfahren, stellt man fest, dass man eine Startzahl n_0 benötigt, für die die gegebene Aussage wahr ist ***und*** den $(n+1)$. Fall aus der Richtigkeit des n. Falles folgern muss. Im Domino-Bild: Dominosteine im richtigen Abstand aufstellen und an geeigneter Stelle umschubsen *(witzigerweise schubst der Mathematiker erst um und stellt dann alle Steine auf, das Bild hinkt also etwas)*. Wir nennen das Erste die Induktionsverankerung und Letzteres den Induktionsschritt. In diesem Induktionsschritt brauchen wir allerdings auch irgendeine Aussage $A(n)$, die von Anfang an gegeben sein muss *(die Induktion ist halt ein indirekter Beweise, siehe oben)*. Diese Aussage $A(n)$ heißt Induktionsannahme. Mehr ist es eigentlich nicht. Es gibt zahlreiche Abwandlungen dieses Beweisverfahrens, aber das brauchen wir im Moment alles nicht.

Ein letztes Beispiel: Addiere alle Zahlen bis n. Was kommt heraus?
Idee: $1+2+...+(n-1)+n = 1+n+2+(n-1)+3+(n-2)+4+...$, was nach dem Kommutativgesetz der Addition erlaubt ist, da die Summe endlich ist. Dadurch werden Pärchen erzeugt, die immer $n+1$ ergeben;
$1+n = n+1, 2+(n-1) = n+1, 3+(n-2) = n+1$ usw. Insgesamt ergeben sich genau $\frac{n}{2}$ solcher Paare. Dann wäre die Lösunge des Problems:
$1+2+...+n = \frac{n}{2}\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Beweisen wir das jetzt mittels Induktion!

Induktionsannahme: $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsverankerung für $n_0 = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ stimmt.

Induktionsschritt von $A(n)$ zu $A(n+1)$: Ist $A(n)$ wahr, also gilt die Induktionsannahme $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, dann können wir mittels Addition von $(n+1)$ auf beiden Seiten der Gleichung die Aussage $A(n+1)$ erhalten! Es steht dann da:

$$1+2+...+n\mathbf{+(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2}\mathbf{+(n+1)}$$

Angeblich ist die linke Seite jetzt gerade $\frac{\mathbf{(n+1)((n+1)+1)}}{2}$. Prüfen wir also, ob das Gleichheitszeichen berechtigt ist:

$$1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \Leftrightarrow \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} \Leftrightarrow (n+1)(n+2) = n(n+1)+2(n+1) = (n+2)(n+1) \Leftrightarrow 0 =$$

Das ist also auch richtig! Wir haben einfach die rechte Seite auf den Hauptnenner 2 gebracht und dann im letzten Schritt $(n+1)$ ausgeklammert. Man hätte auch einfach ausmultiplizieren können.

Das war es schon. In der GFS habt Ihr drei verschiedene Induktionen gesehen, wobei nur die ersten beiden für die Klausur relevant sind. Im Abi kommt eher das letzte Verfahren dran (habe mir auch mal das rote Buch geleistet). Die ersten beiden Induktionstypen sind erstens Beweise von Summen wie oben; da addiert man einfach fröhlich rum und zweitens Beweise zu Teilbarkeiten. Die letzte Variante war die mit der Ableitung. Da kommt man mittels einfachem Addieren nicht weiter! Sucht man wie in der GFS gesehen, die $(n+1)$. Ableitung und hat bereits die Induktionsverankerung geschafft, nimmt man sich einfach „das Alte“ und folgert „das Neue“, indem man die n. Ableitung noch einmal ableitet und schon steht die $(n+1)$. Ableitung da. Vielleicht doch ein Beispiel am Ende für so einen Ableitungsfall.

Wir zeigen, dass für ein Monom (so heißt das auf schlau) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ für die Ableitung $f^{(1)} = f'$ gilt: $f' = n \cdot x^{n-1}$. Dabei setzen wir als bekannt voraus, dass die Ableitung der Geraden konstant der Steigung entspricht *(könnte man schnell mit dem Differentialquotienten zeigen)* und das wir die Produktregel kennen. Mehr brauchen wir nicht!

Induktionsannahme: $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Induktionsverankerung für $n_0 = 1$: Für $f(x) = x$ soll gelten: $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1$. Stimmt. Denn für die Winkelhalbierende ist die Steigung 1.

Induktionsschritt von $A(n)$ zu $A(n+1)$: Es gilt die Induktionsannahme $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Nun soll für $f(x) = x^{n+1}$ gelten: $f'(x) = (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1) \cdot x^n$.
Wir erkennen $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$. Davon ist die Ableitung aus dem Bekannten zu folgern. Mit der Produktregel finden wir

$$(x^{n+1})' = (x)' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (n \cdot x^{n-1})$$

Dabei haben wir zur Bildung von $(x)'$ daran gedacht, dass die Steigung der Winkelhalbierenden 1 ist und die Induktionsannahme $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ verwendet. Vereinfachen wir den letzten Term weiter!

$$(x^{n+1})' = 1 \cdot x^n + x \cdot (n \cdot x^{n-1}) = x^n + n \cdot x \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n$$

Was zu beweisen war.