Vollständige Induktion Typ II – Teilbarkeiten

Zu beweisen: "8 teilt 9^n-1 für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$"

also "8 teilt $\underbrace{9^1-1}_{8}$" ✓ (✓ für "wahr")

"8 teilt $\underbrace{9^2-1}_{80}$" ✓

⋮ usw.

Beweis per Induktion:

1) Verankerung: $n=1$: "8 teilt $\underbrace{9^1-1}_{8}$" ✓

2) Induktionsschritt: $n \to n+1$: ~~Mit~~ Aus "8 teilt 9^n-1" soll folgen, dass "8 teilt $9^{n+1}-1$" auch wahr ist.

Wir "formulieren um": "8 teilt 9^n-1" $\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$:

$\boxed{8k+1=9^n}$ $\circledast$ $\boxed{8k=9^n-1}$

...kleine Umformung...

Nun zum Beweis der eigentlichen Aussage "8 teilt $9^{n+1}-1$"

$\boxed{\text{"8 teilt } 9^{n+1}-1\text{"}}$

$\Leftrightarrow$ "8 teilt $9 \cdot 9^n - 1$"

$\overset{\circledast}{\Leftrightarrow}$ "8 teilt $9 \cdot [8k+1]-1$"

$\Leftrightarrow$ "8 teilt $72k+9-1$"

$\Leftrightarrow$ "8 teilt $72k+8$"

$\Leftrightarrow$ "8 teilt $8(9k+1)$" (☆)

und (☆) ist wahr!!!

Jetzt liest man "rückwärts" und da (☆) wahr ist, ist auch $\boxed{\text{"..."}}$ wahr!