Übungsaufgaben Induktion:

1. Aufgabe: $2+4+6+\ldots+2n = n\cdot(n+1)$

Doof, denn: Wir klammern links einfach eine 2 aus...

$$\Leftrightarrow 2\cdot(1+2+3+\ldots+n) = n\cdot(n+1) \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow 1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

& das kennen wir doch schon...

Trotzdem nochmal nach Schema:

1. Induktionsverankerung: $n=1$: $2+\cancel{\ldots} = 1\cdot(1+1) = 2$ ✓
2. Ind.schluss $n \to n+1$:

$$\underbrace{2+\ldots+2n+\underbrace{(2n+2)}_{\text{neu!}}}_{=(n+1)(n+2)} = \underbrace{n(n+1)+\overbrace{2n+2}^{\text{neu!}}}_{=n^2+n+2n+2}$$

nach Voraussetzung

Ist also $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$?!

$$n(n+2)+(n+2) = \ldots$$

$$n^2+2n+n+2 = n^2+3n+2 \checkmark$$

passt!

$\square$

2. Aufgabe:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{1}{2} n (3n-1)$$

auch doof ... wir erinnern uns an das Päckchen-Machen & fassen den 1. mit dem letzten Summanden zusammen, den 2. mit dem Vorletzten usw.

Dann ergeben sich $\frac{n}{2}$ Päckchen à $\underbrace{1+(3n-2)}_{3n-1}$

$\Rightarrow$ Behauptung. Naja. Wieder Schema:

1. Ind. voraussetzung: $n = 1$: $\underbrace{3 \cdot 1 - 2}_{=1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}_{1}$ ✓

2. Ind. schluss: $n \to n+1$:

(n+1). Fall: $\underbrace{1 + 4 + \ldots + (3n-2)}_{\substack{\text{das alte!} \\ \text{also nach Voraussetzung} \\ \text{ist das gerade} \\ = \frac{1}{2} n (3n-1)}} + \underbrace{(3[n+1]-2)}_{3n+1} = \frac{1}{2} \cdot [n+1] \cdot (3[n+1]-1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} n (3n-1) + 3(n+1) - 2 = \frac{1}{2} (n+1)(3n+3-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 3n^2 - \frac{n}{2} + 3n + 3 - 2 = \frac{3n^2 + 3n - n + 3n + 3 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} + 3n + 1 = \frac{3}{2}n^2 + \cancel{\frac{2n}{2} + 3}\ \frac{5n}{2} + \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0 \quad \checkmark$$

Wahre Aussage ...

$\Longrightarrow$ Behauptung.

$\square$

3. Aufgabe:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1. Ind. verankerung: $n=1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = \frac{6}{6}$ ✓

2. Ind. schritt: $n \to n+1$: Als wahr wird angenommen

[oder Schluss, egal.]

$$1^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Nun wird

$$\underbrace{1^2+\dots+n^2}_{\text{alt! n. Fall, also:}}+\overbrace{(n+1)^2}^{\text{neu!}} = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)$$

behauptet. Wir sehen "sofort":

$$\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(2n+1)+\overbrace{(n+1)^2}^{\text{neu!}} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

... dummes Rumrechnen...

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(n^2+n)(2n+1)+n^2+2n+1 = \frac{1}{6}\cdot(n^2+2n+n+2)(2n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(2n^3+n^2+2n^2+n)+n^2+2n+1 = \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{n}{6}+n^2+2n+1 = \frac{1}{6}(2n^3+4n^2+2n^2+4n+3n^2+6n+3n+6)$$

$$\frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1 = \frac{1}{3}n^3+\underbrace{\frac{9}{6}}_{=\frac{3}{2}}n^2+\frac{13}{6}n+\underbrace{\frac{6}{6}}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow 0=0 \quad \text{Stimmt!} \qquad \square$$

4. Aufgabe:

Neuer Typ! Jetzt geht es um Teilbarkeiten...

„Exkurs“

8 teilt $9^n - 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

auf „schlau“: „$8 \mid 9^n - 1$“

8 ist Teiler von $9^n - 1$

anderes Bsp.: $2 \mid 4$: 2 teilt 4 bzw. 2 ist Teiler von 4.

(Nicht aber $4/2$ ...)

Zurück zur Induktion:

1.) $n = 1$: $8 \mid 9^1 - 1 = 8 \Rightarrow 8 \mid 8$.
Stimmt.

2.) $n \to n+1$:

Annahme: $8 \mid 9^n - 1$

Zu untersuchen: $8 \mid 9^{n+1} - 1$

$9^{n+1} = 9 \cdot 9^n$.

8 teilt im Moment $9^n - 1$, also auch $9 \cdot (9^n - 1)$, weil es ja... ?

... die Klammer bereits teilt (denkt daran, teilt
2 die 10, dann
auch $5 \cdot 10$, weil
bereits 10 geteilt wird ...)

$\Rightarrow$ 8 teilt $9 \cdot (9^n - 1)$ stimmt.

dann gilt aber auch 8 teilt $9 \cdot (9^n - 1) + 8$,
weil ich ziehe 8 ab und nicht 7 oder so.

(bei $5 \cdot 10 + 2$ wäre ja immer noch 2 Teiler!)

$\Rightarrow$ 8 teilt $9 \cdot (9^n - 1) + 8 = 9 \cdot 9^n - 9 \cdot 1 - 8$

$= 9^{n+1} - 1$

Also folgt aus der Richtigkeit von

$8 \mid 9^n - 1$ sofort $8 \mid 9^{n+1} - 1$. Folg $\square$

<u>Aufgabe 5:</u> $6 \mid n^3 - n$ für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Ind. Verankerung: $n=1$: $6 \mid 1^3 - 1 = 0$

Auch! natürlich ist das auch ok. ABER: immer aufpassen, unter WELCHEN VORAUSSETZUNGEN mathematische Formel gelten. HIER: $n \geq \underline{\underline{2}}$!

$\Rightarrow$ Verankerung für $n = 2$:

$$6 \mid 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 \quad \checkmark$$

2) Schluss $n \to n+1$

$$6 \mid n^3 - n \Rightarrow 6 \mid \underbrace{(n+1)^3 - (n+1)}$$

was ist das genau?

binom. Lehrsatz: [oder RECHNEN!]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \end{array}$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1)$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n \underbrace{+ n - n}_{\text{die "schlaue 0"}}$$

↑ NULL

Jetzt finden wir im NEUEN gleich das ALTE wieder, oder? ?

$$= n^3 + 3n^2 + 2n + n - n$$

$$= \underbrace{n^3 - n}_{\text{das alte!}} + 3n^2 + \underbrace{2n + n}_{3n}$$

Wird von 6 geteilt! Jahu!

der Rest ist: $3n^2 + 3n = 3n(n+1)$

MIST! Ein Faktor 3 steckt sicher drin, aber auch noch ein Faktor 2 ?!! (Weil $6 = 2 \cdot 3$)

Lösung: untersuche $n \cdot (n+1)$.

Was ist damit? Da steht

"multipliziere die Zahl n mit ihrem Nachfolger $(n+1)$", oder?

Annahme: n gerade, dann $n+1$ ungerade.

oder n ungerade, dann ist aber $n+1$ gerade!

Nun haben wir also

$$3n \cdot (n+1) = 3 \cdot \text{gerade} \cdot \text{ungerade} \quad \text{oder}$$
$$= 3 \cdot \text{ungerade} \cdot \text{gerade}.$$

So oder so multiplizieren wir mit einer

gerade Zahl. Also ist $3n(n+1)$

durch 6 teilbar!!!

Wieso?!!

$$\frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$$

und entweder

ist $n = 2 \cdot \underset{\in \mathbb{N}}{v}$,

also gerade,

dann kürzt sich die

2 weg, oder

$(n+1) = 2 \cdot \underset{\in \mathbb{N}}{u}$

& es geschieht

das selbe...

$\square$

Diese Aufgabe ist etwas schwerer (weil es war etwas Neues drin), für die Klausur wohl nicht so repräsentativ. ABER MERKE: $2 \mid (n+1) \cdot n$

UND ZWAR IMMER!!!