Spezielle Folgen

Beschäftig man sich etwas mit Folgen, so tauchen immer wieder ähnliche Folgen auf. Die bekanntesten und am einfachsten zu untersuchenden Folgen sind die arithmetische und die geometrische Folge. Beide sind am einfachsten in ihrer rekursiven Form.

Die **arithmetische Folge** entsteht dadurch, dass zum Vorgänger eine Konstante d (für Differenz) addiert wird. Sie ist also von der Form

$$a_{n+1} = a_n + d,\ a_1 = \text{ beliebig, aber fest}$$

Setzen wir d *und* a_1 fest, so haben wir die Folge eindeutig bestimmt. Für $d = 2,\ a_1 = 1$ ist es z.B. die Folge der ungeraden Zahlen.

Wie sieht die arithmetische Folge in expliziter Form aus? Bisher haben wir nur die rekursive Darstellung! (Wir wissen es schon, aber hier kann man gleich lernen, wie man die Formen untereinander wechseln kann.)

Es gilt doch: $a_{n+1} = a_n + d$, aber a_n lässt sich wieder ersetzen durch $a_n = a_{n-1} + d$, also ist $a_{n+1} = (a_{n-1} + d) + d$. Nun ersetzen wir wieder $a_{n-1} = a_{n-2} + d$ in der Gleichung und das, bis wir bei a_1 angelangen. Dann ist Feierabend, weil das war der Startwert!

Was haben wir dann für einen Ausdruck erzeugt? Wir haben $a_{n+1} = a_1 + d + d + ... + d$ mit insgesamt n der ds, denn für jeden Schritt kommt ein Summand d hinzu und durchführen müssen wir das stupide Ersetzen n-mal. Also können wir die Rekursion auch schreiben als:

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d \text{ bzw. für } a_n:\ \ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Das sollte euch bekannt vorkommen!

Erinnern wir uns wieder, dass Folgen spezielle Funktionen sind, sehen wir in der expliziten Form sofort, dass die arithmetische Folge einer Gerade vergleichbar ist. Die „Steigung“ einer Folge ist nach *folgen.pdf* gerade $a_{n+1} - a_n$ und das ist hier einfach d und für alle n konstant. Konstante Steigung → Gerade.

Die **geometrische Folge** hat fast dieselbe Struktur, nur dass in der Rekursion das $+$ durch ein $\cdot$ ersetzt wird und dann aus ersichtlichem Grund für d ein q gewählt wird, denn nun haben wir einen Faktor, der jeden Schritt hinzukommt (da hätte man auch f nehmen können, aber man nimmt historisch q, denn $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ist ein Quotient). Schauen wir uns die rekursive Darstellung der geometrischen Folge an:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,\ a_1 = \text{ beliebig, aber fest}$$

Auch hier legen q und der Startwert a_1 die Folge eindeutig fest. Für $q = 1$ haben wir den langweiligen Fall der konstanten Folge $a_1, a_1, a_1, ...$, denn die 1 macht bei Multiplikation nichts (Überlegung: bei arithmetischen Folgen mit d=0 erhalten wir auch diese konstante Folge. Wieso?).

Wandeln wir hier mit demselben Ansatz wie bei der arithmetischen Folge obige Rekursion in eine explizite Form um, ersetzen also das a_n durch das a_{n-1} usw., so erhalten wir n Faktoren q, bis wir schließlich bei a_1. Daher erhalten wir:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \text{ bzw. für } a_n:\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Auch das ist bekannt!

Man sieht am expliziten Term, dass sich die geometrische Folge wie eine Potenzfunktion verhält. Für $q = 2, a_1 = 1$ ist die entsprechende Potenzfunktion $f(x) = 0.5 \cdot 2^x$ mit $x \in \mathbb{R}$.