Arbeitsblatt zu "Folgen":

Lösung von Aufgabe 1.9375 mittels <u>vollst. Induktion</u>:

Annahme: Da in jedem Schritt der Abstand zur 2 halbiert wird, erwarten wir im n. Schritt nur noch $\frac{1}{2^n}$ Abstand zur 2.

Also vermuten wir:

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}} \quad (*)$$

(Induktionsansatz)

BEWEIS:

Ind. verankerung: $n=1$: $\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}} = 2-\frac{1}{2}$

[allg. für Aussage] $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓

Also dürfen wir nun $A(n)$ als wahr ansehen & versuchen, von $n \to n+1$ zu schließen (Ist A wahr für jedes n soll folgen, dass A auch für den Nachfolger von n, also $(n+1)$ zutrifft!):

Ind. vorauss.: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$ ist wahr.

Ind. schritt: $\underbrace{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{\text{nach Voraussetzung}}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^{n+1}}$

nach Voraussetzung:

$= 2-\frac{1}{2^n}$

Also: $\cancel{2}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = \cancel{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$

$\Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$, was natürlich stimmt!

Damit haben wir Formel (*) für alle natürlichen Zahlen ab der 1 gezeigt.

Nun wissen wir also, dass die Aufgaben durchnummeriert sind mittels:

$$\boxed{A_n = 2 - \frac{1}{2^n}} \quad \text{für } n \geq 1 \quad \text{und} \quad \boxed{A_0 = 2 - \frac{1}{2^0} = 1}$$

ist die Startaufgabe...

für $n \to \infty$ gilt $\frac{1}{2^n} \to 0$

und somit $\boxed{A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 2}$

$\square$

qed in Kurz...