Einleitung

Im Folgenden betrachten wir noch einmal das beschränkte Wachstum aus einer anderen Perspektive. Motiviert wird das durch diese Fragen:

1) Wann ist denn ein Wachstum beschränkt? In den Aufgaben steht oft, gehe davon aus, aber woher wissen die das? Kann man es der Aufgabe vielleicht einfach ansehen?!
2) Kann ich den Wachstumsfaktor k nicht irgendwie einfach haben, wenn er nicht angegeben ist?
3) Kann ich die Schranke, die es ja beim be**schränkten** Wachstum gibt, schnell finden?
4) Wie übersetze ich eigentlich solche Texte in Gleichungen?!

Beschränktes Wachstum anhand vom Bevölkerungswachstum

Fakten: Land mit 78 Millionen Einwohnern, 9 Geburten auf 1000 Einwohnern pro Jahr, 11 von 1000 sterben. Zuzug netto 140.000 Bürger (180.000 wandern zu, 40.000 wandern aus). Auch bei der Sterbe- bzw. Geburtenrate lässt sich bilanzieren: es „verschwinden“ je 1000 Einwohner netto 2 Leute (11 gehen, 9 kommen). Soweit so gut. Und wahrscheinlich ist das realistisch.
(Zusatzfrage: welches Land ist das wohl? Was heißt das bei einem bestehenden Generationenvertrag für die Rente? Aber das führt woanders hin...)

Zur ersten Frage: Wieso liegt hier ein beschränktes Wachstum vor?!
Wollen wir das klären, müssen wir erst einmal wissen, was oben im Text steht (was schon Frage 4 vorgreift). Nennen wir die Zahl der Einwohner E, so ist klar, dass E irgendwie eine Funktion der Zeit t ist. Also schreiben wir $E(t)$. Aber wie ist dieser funktionale Zusammenhang?
Im Text heißt es, dass bei einem Anfangsbestand von 78 Mio Einwohnern nach einem Jahr 2/1000 (2 Promille) dieser Menschen „verschwunden“ *(Zusatz: wieso schreibe ich hier bewußt nicht „gestorben“?)* sind, aber 140.000 andere Menschen dazu gekommen sind.

Um nicht so große Zahlen rumzuschleppen, drücken wir die Zahlen in Mio. aus.

Also Startwert $E(0) = 78$, die Schrumpfung ist dann $Schrumpf(t) = 0.002 \cdot E(t)$, wobei das nach dem ersten Mal genau
$Schrumpf(0) = 0.002 \cdot E(0) = 0.002 \cdot 78 = 0.156$ Einwohnern entspricht. Der Zuwachs beträgt unabhängig von der Zeit t immer $Z = 0.14$.
Wir finden also für den nächsten Zeitpunkt nach $E(0)$, was $E(1)$ entspricht:

$$E(1) = E(0) - Schrumpf(0) + Z = 78 - 0.156 + 0.14 = 77,984$$

bzw. allgemein:

$$E(t+1) = E(t) - Schrumpf(t) + Z = E(t) - 0.002 \cdot E(t) + 0.14$$

Die Bevölkerung schrumpft! Oh nein! Stirbt sie dann bald aus? Das ist nicht so! (Denn wir haben sozusagen einen „beschränkten Zerfall“ und das zeigen wir jetzt).

Gehen wir kurz weg von unserem Land und machen ein Gedankenspiel:
Fakt ist, die Bevölkerung verliert immer 2/1000 ihrer Bürger, erhält aber auch jedes Jahr (vielleicht immer an Weihnachten?) 140.000 neue Bürger dazu. Wenn nur noch 1000 Bürger übrig wären (hypothetisch!), dann würden 2 von ihnen sterben, aber stolze 140.000 zuziehen! Das Land wäre saniert! Auch die nächsten Jahre würde so die Bevölkerung kräftig wachsen!
Das ist etwas komisch, denn wir haben nichts gemacht, außer am Anfangswert zu spielen. Jetzt ist es ein Wachstum?! *(Anmerkung: das ist aber beschränkt, sehen wir gleich)*

Ein zweites Gedankenspiel: Gehen wir ins Langweil-Land. Dort gibt es (in Mio.) exakt 70 Bürger und wieder unsere Sterbe-/Geburtenrate bzw. Zuzugsrate von

$Schrumpf_{Langweil-Land}(t) = 0.002 \cdot E_{Langweil-Land}(t)$ bzw. $Z_{Langweil-Land} = 0.14$.

Was passiert in diesem Land? Schrumpft hier die Bevölkerung? Oder wächst sie? Stellen wir die Gleichung von oben auf, nur mit 70 anstelle 78 (wieder haben wir nur am Anfangswert gedreht):

$$E(1) = E(0) - 0.002 \cdot E(0) + 0.14 = 70 - 0.002 \cdot 70 + 0.14 = 70 - 0.14 + 0.14 = 70$$

Das ist lustig. Nach einem Jahr sind gleich viele Einwohner verschwunden wie auch wieder zugezogen; und das wird dann jedes weitere Jahr zwangsläufig so bleiben. Es gilt sozusagen:

$$E(t+1) = E(t)$$

für alle Zeiten t. Hier herrscht ein Gleichgewicht zwischen Verschwindenden und Dazukommenden. Zu allen Zeiten beträgt bei festen äußeren Bedingungen in Langweil-Land die Bevölkerung dieselbe.

Zurück zu unserem Problem. Wir haben mittlerweile drei Fälle gefunden (bei drei verschiedenen Startwerten). Entweder die Bevölkerung ist zu einem Zeitpunkt sehr klein, dann überwiegt der Zuwachs und sie wächst, oder sie ist groß und schrumpft. Der dritte Fall scheint langweilig: hier tut sich einfach gar nichts.

Der langweilige Fall ist aber der entscheidende für unser Verständnis bei solchen Aufgaben!

Denn was passiert mit unserer Bevölkerung, solange wir mit $E(t) < 70$ liegen? Sie wächst! Denn formen wir unser allgemeine Gleichung ganz legal etwas um:

$$E(t+1) = E(t) - 0.002 \cdot E(t) + 0.14 = E(t) + (0.14 - 0.002 \cdot E(t))$$

so sieht man, dass das, was zu E(t) dazukommt (die gesamte Klammer), positiv ist, wenn gilt:

$$0.002 \cdot E(t) < 0.14$$

Hier ist der absolute Knackpunkt. Versteht das!!! Ihr seht dann nach leichtem Umformen, dass diese Ungleichung für Zahlen $E(t) < 70$ immer erfüllt ist, oder? Das ist der Beweis: liegen wir mit irgendeiner Zahl $E(t)$, insbesondere mit $E(0)$ UNTER 70, dann WÄCHST unsere Bevölkerung im nächsten Schritt, denn es kommt etwas POSITIVES dazu! Es gilt dann $E(t+1) > E(t)$!!!

Jetzt eine Aufgabe für Euch: Überlegt den Fall, wie er anfangs gestellt war, mit einer Startbevölkerung von $E(t) > 70$, gerne auch am Spezialfall von 78.

Fassen wir zusammen: Anschaulich gesprochen, pendelt sich die Einwohnerzahl bei 70 ein. Denn liegen wir mit unserem $E(t)$ über 70, dann gehts runter gen 70, liegen wir mit einem $E(t)$ drunter, gehts hoch und so auch gegen 70. Erreichen wir zufällig einmal exakt die Zahl 70, dann wird unser Land für ewig zum Langweil-Land! Es bleiben immer 70 Millionen Einwohner.
(Zusatz: außer, es ändern sich die äußeren Bedingungen und die Einwanderer wollen nicht in das neue Langweil-Land. Dann wird es ein Schrumpfland, das exponentiell abnimmt und ziemlich schnell verschwindet.)

Meiner Meinung nach haben wir schon Fragen 3 und 4 beantwortet, 1 und 2 sind immer noch offen. Doch Frage 1 ist eigentlich auch klar, wenn wir den allgemeinen Fall mit $E(t)$ dieser Aufgabe hinschreiben und einfach etwas umformen:

$$E(t+1) = E(t) - 0.002 \cdot E(t) + 0.14 = E(t) - 0.002 \cdot [E(t) - 70] = E(t) + 0.002 \cdot [70 - E(t)]$$

Und da steht unsere Definitionsgleichung eines beschränkten Wachstums!

Diese war ja allgemein:

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot (S - B(t))$$

bzw. in Zuwächsen gedacht, kommt zum momentanen Bestand $B(t)$ nach einem Zeitschritt (dann sind wir bei $B(t+1)$) der Summand $+k \cdot (S - B(t))$ dazu.
[Natürlich sind die Buchstaben B und E total willkürlich gewählt!]

Und nun haben wir nicht nur Frage 1, sondern auch noch Frage 2 beantwortet: Nach unserem Umformen war unser Summand $0.002 \cdot (70 - E(t))$ und $k = 0.002$ bzw. $S = 70$ sind einfach abzulesen.

Wobei ich denke, dass $S = 70$ niemanden mehr wundert, denn das war die Zahl von Langweil-Land, wo sich nichts mehr ändert. Die Zahl 70 liegt natürlich für unseren Anfangsbestand von $E(0) = 78$ zeitlich im Unendlichen, also haben wir kein Risiko, das gefürchtete Schrumpfland zu werden ;-)

Zusatz: Für mich wären einige Dinge hier etwas seltsam und scheinbar ungenau. Mit etwas Glück löst sich das in Klasse 12. Dazu Denkanstöße (wen es interessiert):

1) Was heißt eigentlich „im Unendlichen“? Antwort: Klasse 12...
2) Was passiert in Langweil-Land, wenn mal einige Bürger mehr zuziehen? Antwort: die Einwohnerzahl pendelt schnell auf 70 zurück, denn 70 ist ein STABILER Fixpunkt.
3) Gibt es INSTABILE Fixpunkte? Antwort: Ja. Die werden aber nur indirekt in der Schule behandelt.
4) Deine Frage!